Il seguente articolo con il titolo ''Alexander Grothendieck. Entusiasmo e creatività. Un nuovo linguaggio al servizio dell'immaginazione.'' è apparso nel volume ''Grandi Matematici del Novecento'' Lettera Matematica Pristem, Vol. 50/51, Springer ©

ALEXANDER GROTHENDIECK

LUCA BARBIERI VIALE

C'est à celui en toi qui sait être seul, à l'enfant, que je voudrai parler et à personne d'autre.

A. Grothendieck[1]

Alexander Grothendieck nasce a Berlino il 28 Marzo 1928. Il padre, Sascha Shapiro, anarchico di origine russa, ebbe parte attiva nei movimenti rivoluzionari prima in Russia e poi in Germania, negli anni '20, dove incontrò Hanka Grothendieck, la madre di Alexander. Dopo l'avvento del nazismo la Germania era troppo pericolosa per un rivoluzionario ebreo e la coppia si trasferì in Francia, lasciando Alexander in affidamento ad una famiglia presso Amburgo. Nel 1936, durante la guerra civile spagnola, il padre di Alexander si associò agli anarchici nella resistenza contro Franco. Nel 1939, Alexander raggiunse i genitori in Francia ma il padre fu arrestato e – anche in seguito alle leggi razziali, promulgate dal governo di Vichy nel 1940 – mandato ad Auschwitz dove morì nel 1942. Hanka ed Alexander Grothendieck furono anch'essi deportati ma scamparono all'eccidio. Alexander riuscì a frequentare il liceo al Collège Cévenol in Chambon-sur-Lignon alloggiando nella casa *Secours Suisse* per bambini rifugiati, separatamente dalla madre, era però costretto a scappare nei boschi ad ogni rastrellamento della Gestapo. Fu poi studente all'Università di Montpellier e nell'autunno del 1948 arrivò a Parigi con una lettera di presentazione per Élie Cartan. Fu quindi accettato all'École Normale Supérieure come *auditeur libre* per l'anno 1948-49 assistendo al debutto della topologia algebrica presso il seminario di Henri Cartan (figlio di Élie). I primi interessi di Grothendieck furono però rivolti all'analisi funzionale e su consiglio di Cartan si trasferì a Nancy. Sotto la guida di J. Dieudonné e L. Schwartz nel 1953 conseguì il dottorato.

[1]Récoltes et Semailles, Promenade à travers une oeuvre, p. 7

Grothendieck, negli anni del Liceo e all'Università, ebbe ben poca soddisfazione dai corsi e programmi d'insegnamento istituzionali e non si può dire che fu uno studente modello. La sua curiosità, unita all'insoddisfazione, lo spinse a sviluppare indipendentemente, non ancora ventenne, una teoria della misura e dell'integrazione che poi apprese, a Parigi, esser già stata scritta da Lebesgue. "Ho appreso allora nella solitudine quel che è essenziale nel mestiere di matematico – quello che nessun maestro può veramente insegnare" così Grothendieck.[2] Il periodo ufficialmente produttivo di Grothendieck, attestato da una mole impressionante di scritti, si colloca nell'arco degli anni 1950-70. Se gli argomenti di ricerca dei primi anni '50 furono di analisi funzionale, i grandi *temi* della geometria algebrica, i suoi fondamenti, come la ridefinizione stessa del concetto di spazio, sono alla base delle ricerche degli anni 1957-70.

Nel 1959, divenuto professore presso il nascente Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) a Bures, vicino a Parigi, anima un seminario nel quale suggerisce e propone a studenti e colleghi – con una generosità esemplare – le sue idee di ricerca, condividendo senza riserve il suo entusiasmo e la sua creatività. In questi primi anni anche i contatti frequenti ed intensi con Jean Pierre Serre, come testimonia la loro corrispondenza, sono una sorgente d'ispirazione e un mutuo scambio d'idee. Nel decennio 1959-69 i suoi risultati sono principalmente diffusi, da una parte, come *Éléments de Géométrie Algébrique* (EGA) – redatti in collaborazione con Dieudonné – e con l'aiuto dei partecipanti al *Séminaire de Géométrie Algébrique* (SGA) mediante le note al seminario, e dall'altra in *Exposés* al seminario Bourbaki. Nel progetto iniziale di Grothendieck il *Séminaire* era da considerarsi una forma preliminare degli *Éléments* destinata ad essere inglobata in questi ultimi, che vengono inizialmente pubblicati dall'IHES in svariati poderosi tomi. Nel 1966 riceve la *Fields Medal* (il massimo riconoscimento per un matematico).

Nel 1970 Grothendieck, all'età di 42 anni, abbandona la scena ufficiale. Le motivazioni che lo spingono a ritirarsi dal mondo accademico sono molteplici, ma certamente il suo radicale antimilitarismo è una ragione dichiarata. Infatti, si accorge che l'IHES riceve fondi dal ministero della difesa – da oltre tre anni a sua insaputa – e come tutta risposta abbandona l'Institut e lo diffida dalla pubblicazione di EGA e SGA, assegnando la riedizione di quest'ultimi alla Springer-Verlag. Avendo vissuto da rifugiato, con passaporto delle Nazioni Unite, senza cittadinanza – i suoi documenti ufficiali sparirono nell'apocalisse nazista

[2] op. cit., p. 5

– dà vita al movimento pacifista ed ambientalista *Survivre*. Negli anni della guerra in Vietnam e della proliferazione degli armamenti nucleari – come per altro anche nel nostro panorama attuale di conflitti sempre vivi – il pacifismo di Grothendieck appare come un'assunzione di responsabilità significativa e non trascurabile dalle istituzioni coinvolte che, al contrario, anche oggi continuano a ricevere i suddetti finanziamenti. Successivamente a tale scelta Grothendieck trascorre un paio d'anni al *Collége de France*, poi a Orsay ed infine, nel 1973, ritorna all'Università di Montpellier, rifiutando il *Crafoord Prize* nel 1988, anno del suo pensionamento. In questi ultimi anni, ritiratosi a vita privata presso Mormoiron, in campagna, avendo rinunciato a viaggiare, si dedica alla corrispondenza e alla redazione di *Récoltes et Semailles*, una lunga riflessione e testimonianza sul suo passato di matematico, nelle parole di Grothendieck, una lunga meditazione sulla vita ovvero "dell'avventura interiore che è stata e che è questa mia vita.[3]"

Ho ricevuto alcune parti di *Récoltes et Semailles* nel 1991, insieme ad una lettera di Grothendieck nella quale mi ha anche indicato Aldo Andreotti come "un buon amico e una persona veramente preziosa: son giunto ad apprezzare le sue qualità peculiari molto più adesso che è mancato che negli anni '50 e '60 quando era ancora in vita." Non sono a conoscenza di matematici italiani che abbiano collaborato con Grothendieck in quegli anni, la *scuola italiana* ha assimilato molto lentamente i suoi metodi algebrici in geometria, anche se in parte hanno radici italiane, in Severi e Barsotti, ad esempio.

La *Présentation des Thèmes* di *Récoltes et Semailles* è la preziosa fonte – unitamente alla suddetta lettera – per alcune considerazioni precedenti e il canovaccio per un affresco del suo pensiero matematico che ora mi accingo a delineare.

L'eccellenza di Grothendieck, il suo *genio* matematico, è ben riconoscibile nella sua propensione naturale a palesare dei *temi* visibilmente cruciali che nessuno aveva evidenziato o riconosciuto. La sua fecondità ha radici profonde e si esprime attraverso linguaggi sempre nuovi, emerge come un torrente di nuove *nozioni-astrazioni* ed *enunciati-formulazioni*. Ben spesso enunciati così perfettamente formulati da una immaginazione fervida e implacabile son risultati essere il fondamento di una intera teoria che Grothendieck stesso ha delineato, sviluppato e compiuto, ed in altri casi solo indicato.

Questa sua propensione alla *creazione* della matematica, prima ancora che alla *soluzione* dei problemi matematici, rende Grothendieck un matematico estremamente particolare e stravagante, se intendiamo

[3] op. cit., p. 8

la destrezza matematica come la capacità dell'uomo di risolvere problemi. Il profano che si accosta all'opera matematica di Grothendieck dovrà abbandonare il senso comune che guarda al matematico come un *problem solver* e provare veramente a guardar la matematica come un'arte e il matematico come un artista. Un'arte del tutto particolare, per la quale le *invenzioni* si mutuano con le *dimostrazioni* ovvero l'immaginazione si deve accordare con la ragione e le sue opere sono *teorie* in un intreccio, un disegno, che permette sempre di cogliere un'unità nella molteplicità. Come Grothendieck stesso scrive "è in questo atto di *passare oltre*, del non restare rinchiusi in un circolo imperativo che noi ci fissiamo, è innanzitutto in quest'atto solitario che si trova la *creazione*.[4]"

Per Grothendieck, le teorie matematiche sono anche opportunità per la riflessione in senso lato e un esercizio meditativo, una forma di contemplazione che accompagna la nostra avventura interiore. La matematica è quindi uno *yoga* che si diversifica e prolifera teorie differenti ma che ha fondamenta ben solidamente unitarie. Il differenziarsi di questi *temi* vecchi e nuovi s'intreccia anche ad una storia delle *idee* alle quali questi sono ispirati. Nelle parole di Grothendieck stesso, vi sono tradizionalmente tre aspetti delle cose che sono oggetto della riflessione matematica: il numero o l'aspetto aritmetico, la misura o l'aspetto metrico (o analitico) e la forma o l'aspetto geometrico. "Nella maggior parte dei casi studiati in matematica, questi tre aspetti sono presenti simultaneamente e in stretta interazione.[5]"

Nel seguito esamineremo alcuni di questi *temi* propri della geometria algebrica nella prospettiva che Grothendieck ha svelato. Un occhio che predilige la *forma* e la *struttura* e quindi l'aspetto geometrico ed aritmetico, in una visione unificatrice che ha dato vita ad una nuova geometria: la *geometria aritmetica*.

> "Possiamo affermare che il numero è atto ad afferrare la struttura degli aggregati discontinui o discreti: i sistemi, sovente finiti, formati da elementi o oggetti per così dire isolati gli uni in rapporto agli altri, senza nessun principio di passaggio continuo da l'uno all'altro. La grandezza al contrario è la qualità per eccellenza, suscettibile di variazione continua; attraverso ciò, è atta ad afferrare le strutture e i fenomeni continui: i movimenti, gli spazi, le varietà di tutti i generi, i campi di forza etc. Così, l'aritmetica appare (grosso modo) come la scienza delle strutture discrete, e l'analisi, come la scienza delle strutture continue.

[4]op. cit., p. 6

[5]op. cit., p. 26

> Quanto alla geometria, possiamo affermare che dopo più di duemila anni che esiste sotto forma di una scienza nel senso moderno del termine, è a cavallo di questi due tipi di strutture, quelle discrete e quelle continue. D'altronde, per lungo tempo, non vi è stato veramente un "divorzio" tra *due* geometrie che sarebbero state di natura differente, una discreta e l'altra continua. Piuttosto, ci sono stati due punti di vista diversi nell'investigazione delle *stesse* figure geometriche: una mettendo l'accento sulle proprietà discrete [...] l'altra sulle proprietà continue [...].
>
> È alla fine dell'800 che apparve un divorzio, con l'avvento e lo sviluppo di ciò che talvolta si è indicato come la *geometria (algebrica) astratta*. Grosso modo, questa ebbe come scopo quello d'introdurre, per ogni numero primo p, una geometria (algebrica) di *caratteristica* p, ricalcata sul modello (continuo) della geometria (algebrica) ereditata dai secoli precedenti, ma in un contesto, tuttavia, che apparve come irriducibilmente discontinuo, discreto. Questi nuovi oggetti geometrici, sono diventati sempre più importanti all'inizio del '900, e questo, in modo particolare, in vista della loro stretta relazione con l'aritmetica [...] Sembrerebbe essere una delle idee direttrici nell'opera di André Weil [...] È in questo spirito che egli ha formulato, nel 1949, le celebri *congetture di Weil.* Congetture assolutamente sbalorditive, in verità, che fanno intravedere, per queste nuove varietà (o spazi) di natura discreta, la possibiltà di certi tipi di costruzioni e di argomenti che fino a quel momento sembravano pensabili solamente nel quadro dei soli spazi considerati come degni di questo nome dagli analisti [...]
>
> Possiamo ritenere che la nuova geometria è innanzitutto, una *sintesi* tra questi due mondi [...] il mondo aritmetico [...] e il mondo della grandezza continua [...]. In questa nuova visione, i due mondi un tempo separati, ne formano solo uno.[6]"

Questa visione unificatrice s'è incarnata nei concetti di *schema* e *topos* svelando strutture nascoste: la ricchezza geometrica del mondo discreto è venuta alla luce in tutta la sua bellezza e articolazione, permettendo così la dimostrazione delle suddette congetture di Weil da parte di Grothendieck stesso e di Pierre Deligne, un suo allievo.

Il concetto di *schema* costituisce un vasto ingrandimento o generalizzazione del concetto di varietà algebrica così come era stata studiata dalla scuola italiana e tedesca dei primi anni del novecento. L'idea di schema di Grothendieck e le linee fondamentali di una *teoria* degli

[6]op. cit., p. 28-30

schemi, mediante il concetto di *morfismo* tra essi ovvero di opportune trasformazioni di schemi, risalgono agli anni 1957–58 e vengono brevemente esemplificate al congresso mondiale dei matematici ad Edimburgo nel 1958. Proprio il concetto di *fascio* – già introdotto e studiato da Leray e Serre – risulta qui essenziale in quanto permette di ricostruire un dato *globale* a partire da un ventaglio di dati *locali* e consente ragionamenti di tipo continuo in ambito discreto.

Se la geometria algebrica è lo studio delle equazioni polinomiali e dei luoghi geometrici definiti da queste la teoria dei fasci e degli schemi è l'agile e naturale linguaggio nel quale esprimerla fedelmente, linguaggio atto ad esplicitare finemente la struttura intima di questi enti geometrici.

> Ad ogni *varietà affine* corrisponde classicamente un *anello delle coordinate* che la descrive algebricamente appunto mediante equazioni polinomiali in uno spazio ambiente
>
> $$\text{varietà affine} \iff \text{anello delle coordinate}$$
>
> L'idea fondamentale della teoria degli schemi è che questa corrispondenza si può estendere ad una corrispondenza
>
> $$\text{schemi affini} \iff \text{anelli commutativi con } 1$$
>
> associando ad ogni anello A il suo *spettro* $\mathrm{Spec}(A)$. Infatti, osserviamo che la collezione di tutti i primi p di A dà anche origine ad un ventaglio di anelli (germi) locali A_p. Viceversa, desideriamo che A sia ricostruibile da questo ventaglio, preso nella sua totalità. Questo ventaglio è in realtà il riflesso *locale* di un ventaglio – un fascio – di natura anche topologica per il quale A incarna l'aspetto *globale*. Lo *schema affine* $\mathrm{Spec}(A)$ risulta appunto dalla sinergia tra la topologia (detta di Zariski) dell'insieme dei primi ed il ventaglio dei corrispondenti anelli locali.
>
> Uno *schema* sarà dunque un *incartamento* di schemi affini ovvero uno spazio topologico X e un *fascio strutturale* $\mathcal{O}_X$ tale che per ogni punto di X esiste un intorno aperto del tipo $\mathrm{Spec}(A)$. Il ventaglio ora incarnato dal *fascio strutturale* segue e riflette fedelmente la forma dello spazio soggiacente allo schema.

Un vantaggio di questa definizione di *forma* consiste innanzitutto nel fatto che descrive intrinsecamente gli enti geometrici, schematicamente, come una rete di enti primi, omettendo il riferimento a uno spazio ambiente.

Un ulteriore vantaggio del concetto di schema è la sua versatilità *relativa* che permette di concepire uno schema definito da un *morfismo* su una *base* anche come una *famiglia* di schemi.

> Un *morfismo* di schemi $X \to S$ non è altro che un'applicazione continua degli spazi soggiacenti compatibile con i fasci strutturali. Se $S = \mathrm{Spec}(A)$ un tale schema su S equivale al fatto che il fascio

strutturale $\mathcal{O}_X$ sia un fascio di A-algebre. Ad esempio *ogni* schema X si può considerare come uno schema su $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Inoltre, esiste un *prodotto fibrato* $X \times_S S' \to S'$ per schemi $X \to S$ e $S' \to S$ che realizza il *cambio base* da S ad S'. Questo prodotto corrisponde all'operazione di estensione o riduzione degli scalari dell'ipotetiche equazioni per X. Ad esempio, ogni schema si riduce modulo un numero primo $p \in \mathbb{Z}$ mediante il prodotto con $S' = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p)$, producendo anche una famiglia di schemi corrispondente alla riduzione modulo p delle sue ipotetiche equazioni. Inoltre, il prodotto di X con $S' = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ produce uno schema in caratteristica zero (spazio analitico corrispondente al primo $p = \infty$).

Isolando buone proprietà delle famiglie mediante il concetto di morfismo *piatto*, e ritrovando il concetto di compattezza mediante quello di morfismo *proprio*, si possono inoltre sviluppare concetti di natura differenziale in ambito puramente algebrico mediante il concetto di morfismo *liscio*.

Queste considerazioni hanno portato Grothendieck a sviluppare sistematicamente una geometria algebrica *relativa* ad una base che permette di "collegare una con l'altra le diverse geometrie associate ai diversi numeri primi.[7]"

In quest'ottica, un *punto* di uno schema su una base non sarà altro che un *morfismo* dalla base verso lo schema ed è ben probabile e naturale che uno schema sia senza punti ovvero che li abbia solamente cambiando base.

Un S-punto di uno schema $X \to S$ è un morfismo $S \to X$ che lascia fisso S. Se k è un campo $S = \mathrm{Spec}(k)$ si riduce topologicamente ad un vero punto e gli schemi di *tipo finito* su k, con i loro relativi punti, svolgono la parte delle *nuove* varietà algebriche, consentendo a concetti infinitesimali di esser visualizzati mediante elementi nilpotenti. Ad esempio, i morfismi da $\mathrm{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ verso uno schema X corrispondono ad S-punti di X su $S = \mathrm{Spec}(k)$ unitamente ai loro *vettori tangenti*.

In questo senso lo schema $X \to S$ stesso può essere visto come una collezione di *fibre* $(X_s)_{s\in S}$ al variare dei punti della base ma anche come la collezione di *tutti* i suoi punti *relativi* alla base ovvero al variare di *tutti* gli schemi $T \to S$ e morfismi $T \to X$ che lasciano fisso S. Questa visione di uno schema conduce al concetto di *rappresentabilità* che permette di costruire degli schemi rappresentandoli mediante i loro ipotetici (relativi) punti.

[7]op. cit., p. 33

Così come il concetto di *schema* costituisce un ingrandimento del concetto di varietà algebrica il concetto di *topos* costituisce una metamorfosi del concetto di spazio topologico.[8] Il topos *étale* e quello *cristallino* associati ad uno schema costituiscono il passo fondamentale per la visualizzazione della *struttura* ovvero per la costruzione degli *invarianti coomologici* dello schema. Con il concetto di *sito* già nel 1958 – "il più fecondo di tutti gli anni della mia vita[9]" – Grothendieck sviluppa analogamente una topologia *relativa* dove alcuni *morfismi* svolgono il ruolo di *aperti*. Il *topos* corrispondente a tale *sito* rivela interamente la natura aritmetica degli schemi. Sinteticamente:

$$\text{schema} \ \Rightarrow \ \text{topos} \ \Rightarrow \ \text{coomologia}$$

> "Consideriamo l'insieme formato da tutti i *fasci* su uno spazio (topologico) dato o, se si vuole, questo arsenale prodigioso formato da tutti questi "metri" che servono a misurarlo. Consideriamo questo insieme o arsenale come munito della sua struttura più evidente, che appare, se così si può dire, a lume di naso; in verità, una struttura detta di *categoria* [...] È questa sorta di *superstruttura d'agrimensura* denominata *categoria dei fasci* (sullo spazio in questione) che sarà d'ora in avanti considerata come "incarnante" ciò che è più essenziale allo spazio [...] possiamo ormai "dimenticarci" lo spazio iniziale, mantenere e servirci della *categoria* (o arsenale) associato, il quale sarà considerato come l'incarnazione più adeguata della *struttura topologica* (o spaziale) che s'intende esprimere.
>
> Come così spesso accade in matematica, noi siamo riusciti qui (grazie all'idea cruciale di fascio o di metro coomologico) a esprimere una certa nozione (quella di spazio all'occorrenza) in termini di un'altra (quella di categoria). Come sempre, la scoperta di una tale *traduzione* d'una nozione (che esprime un certo tipo di situazione) nei termini di un'altra (corrispondente ad un altro tipo di situazione) arricchisce la nostra comprensione sia dell'una che dell'altra mediante la confluenza inattesa di intuizioni specifiche che si rapportano sia a l'una che all'altra. Così, una situazione di natura "topologica" (incarnata dallo spazio dato) si trova qui tradotta in una situazione di natura "algebrica" (incarnata da una categoria) o, se vogliamo, il "continuo" incarnato dallo spazio si trova tradotto o espresso dalla struttura di categoria, di natura "algebrica".[10]"

[8] op. cit., p. 40
[9] op. cit., p. 24
[10] op. cit., p. 38-39

Una *teoria coomologica* secondo Grothendieck segue naturalmente da *sei operazioni* associate alla *categoria derivata* dal topos.

> Le *sei operazioni* di Grothendieck sono *funtori* tra *categorie derivate*. Si tratta del prodotto tensiorale derivato $\overset{L}{\otimes}$, di $\mathcal{RH}om$ (che produce gli $\mathcal{E}xt^i$) e per $f : X \to S$, un morfismo di schemi, di due funtori d'immagine diretta Rf_* e $Rf_!$ e due d'immagine inversa Lf^* e $Rf^!$. Una *teoria della dualità relativa* viene qui espressa dall'aggiunzione tra $Rf_!$ e $Rf^!$.

Ad ogni geometria di *caratteristica p* Grothendieck associa una *coomologia ℓ-adica* corrispondente ad ogni primo $\ell \neq p$ mediante il *topos étale* e una *coomologia cristallina* mediante il *topos cristallino.*

A sua volta, questo arsenale di strutture e operazioni dovrebbe pervenire allo stesso risultato. "È per arrivare ad esprimere questa intuizione di parentela tra teorie coomologiche differenti che ho formulato la nozione di *motivo* associato ad una varietà algebrica.[11]" Questo *tema* intende suggerire un *motivo* comune soggiacente alla moltitudine delle teorie coomologiche possibili.

Grothendieck ha ulteriormente suggerito *nuove* congetture, a completamento di tale visione unificatrice della *nuova* geometria, le *congetture standard* che indicano, predicono, le leggi di un nuovo yoga intermedio tra *forma* e *struttura.* Se le congetture di Weil predicevano l'esistenza di una *coomologia* detta di Weil appunto, poi costruita da Grothendieck mediante il *topos étale*, ovvero di una *struttura* associata alla *forma* in grado di cogliere sia l'aspetto geometrico che quello aritmetico, nel quadro della nascente geometria (algebrica) astratta sopra descritta, le *congetture standard* di Grothendieck predicono l'esistenza di una *coomologia motivica* in grado di sintetizzare in un solo *invariante* della *forma* tutte le *strutture* che le si possono associare. La loro formulazione – ottenuta, indipendentemente, anche da Bombieri – appare in una breve nota dal titolo *Standard conjectures on algebraic cycles* contenuta negli atti del Colloquium di Geometria Algebrica del 1968 a Bombay (TIFR, Mumbai).

> La costruzione geometrica dei motivi di Grothendieck si opera mediante i *cicli algebrici* già introdotti da Severi negli anni '30 e poi anche studiati da Chow negli anni '50; questi *cicli* sono combinazioni lineari formali di sottovarietà e le *corrispondenze* da X ad Y sono definite mediante i cicli sul prodotto $X \times Y$.
>
> Per una coomologia di Weil $X \mapsto H^*_\ell(X)$ si ha una *mappa ciclo* $\mathcal{Z}^j(X) \to H^{2j}_\ell(X)$ che ad ogni *ciclo algebrico* di codimensione j su X associa una *classe di coomologia.* La *parte algebrica* di $H^{2*}_\ell(X)$

[11] op. cit., p. 46

è quella generata da classi di cicli algebrici. Mediante la formula di Künneth si possono inoltre considerare

$$H_\ell^*(X \times Y) = H_\ell^*(X) \otimes H_\ell^*(Y) = \mathrm{Hom}(H_\ell^*(X), H_\ell^*(Y))$$

in quanto $H_\ell^*(-)$ sono spazi vettoriali di dimensione finita. Il principio che suggerisce tale identificazione è che gli operatori coomologici di natura algebrica debbano essere algebricamente definiti mediante una classe associata ad un ciclo sul prodotto e quindi da una corrispondenza.

Le due *congetture standard* si possono sintetizzare come segue. La prima, detta *standard Lefschetz* asserisce che un certo operatore $\Lambda : H_\ell^*(X) \to H_\ell^*(X)$ quasi-inverso dell'operatore di Lefschetz L sia indotto da un ciclo algebrico ovvero che l'operatore indotto – per iterazione – da quello di Lefschetz ristretto alla *parte algebrica* sia un isomorfismo. La seconda, detta *standard Hodge* afferma che una certa forma bilineare definita sulla *parte algebrica primitiva* della coomologia è definita positiva. In caratteristica zero, queste congetture seguono dalle congetture di Hodge.

Una semplice conseguenza delle *congetture standard* è l'ipotesi di Riemann geometrica come formulata nelle celebri congetture di Weil ma anche la coincidenza dell'equivalenza omologica e numerica per cicli algebrici: un problema aperto anche in caratteristica zero.

Questo yoga intermedio basato sul concetto di *motivo* e la corrispondente teoria dei motivi dovrebbe fornire le strutture più fini associate alle forme come invarianti:

$$\text{forma} \;\Rightarrow\; \text{motivo} \;\Rightarrow\; \text{struttura}$$

Proprio come un motivo musicale ha diverse incarnazioni tematiche così il *motivo* avrà diverse *realizzazioni* o *avatar* in modo che le *strutture* familiari degli invarianti (coomologici) della *forma* saranno "semplicemente il fedele riflesso di proprietà e strutture interne al *motivo*.[12]"

Il primo congresso interamente dedicato ai motivi si è tenuto a Seattle nel 1991. Notevoli avanzamenti su questo *tema* son stati ottenuti da Vladimir Voevodsky – che ha ricevuto la *Fields Medal* nel 2002 – mediante la costruzione di una *categoria triangolata* dei motivi, con argomenti di *omotopia algebrica* anch'essi in parte presagiti da Grothendieck come "tipi d'omotopia motivica.[13]" La costruzione di Voevodsky permette di ottenere una "incarnazione" della *coomologia motivica* senza però rispondere alle *congetture standard* che restano tuttora – insieme alle congetture di Hodge – il fondamentale problema aperto della geometria algebrica moderna.

[12]op. cit., p. 46
[13]op. cit., p. 47

In conclusione, Grothendieck come Einstein, attraverso una "mutazione della concezione che noi abbiamo dello spazio, in senso matematico da una parte e fisico dall'altra[14]" e l'innovazione del nostro sguardo sul mondo mediante una visione unificatrice della matematica da una parte e della fisica dall'altra, s'impongono ai nostri occhi come il matematico e il fisico che hanno rivoluzionato il pensiero scientifico mediante il concetto di *relatività*.

Referenze bibliografiche

All'indirizzo `http://www.grothendieck-circle.org/` potete trovare tutte le informazioni biografiche, bibliografiche e molto altro. Una bibliografia completa degli scritti di Grothendieck si trova anche nel primo volume del *Grothendieck Festschrift* pubblicato dalla Birkäuser nel 1990. Segnalo dunque solamente alcune referenze essenziali che sono state anche fonti da cui ho attinto:

P. Cartier: A mad day's work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich, the evolution of the concepts of space and symmetry, Bull. AMS, Vol. **38** N. 4, p. 389–408.

J. Dieudonné: De l'analyse fonctionnelle aux fondements de la géométrie algébrique, in *Grothendieck Festschrift*, Birkäuser, Boston, 1990.

J. Giraud: Une entrevue avec Jean Giraud, à propos d'Alexandre Grothendieck, Le journal de maths, Vol. 1 (1994) N. 1, p. 63-65.

A. Grothendieck: Récoltes et Semailles, Montpellier, 1985-86.

A. Grothendieck: The responsibility of the scientist today, Queen's Papers in Pure & Appl. Math. Vol. **27**, Kingston, 1971.

J.-P. Serre: Grothendieck-Serre correspondence, AMS-SMF, 2003.

[14]op. cit., p. 59

Montpellier, 19 aprile 1988

Caro Professor Ganelius, la ringrazio per la sua lettera del 13 aprile, che ho ricevuto oggi, e per il telegramma. Il premio Crafoord insignitomi insieme a Pierre Deligne (che fu mio studente) quest'anno dall'Accademia reale svedese, accompagnato da un'ingente somma di denaro, mi ha molto onorato. Tuttavia, mi rincresce informarla che non desidero accettare questo premio, come nessun altro, per le seguenti ragioni:

1) Lo stipendio di professore e la pensione, che inizierà dal prossimo ottobre, sono più che adeguati ai miei bisogni materiali e a quelli dei miei dipendenti; per cui non mi occorre denaro. Quanto alle onorificenze conferite ad alcuni dei miei lavori sui fondamenti, sono convinto che solo il tempo darà prova della fertilità di nuove idee o visioni. La fertilità si misura con il risultato e non con un riconoscimento.

2) Noto, inoltre, che tutti i ricercatori di alto livello, ai quali un prestigioso premio come quello Crafoord è indirizzato, hanno una posizione sociale che dà loro più ricchezza materiale e più prestigio scientifico di quanto sia necessario, con il potere e i privilegi che ne conseguono. Eppure, non è chiaro che la sovrabbondanza di alcuni è possibile solo al costo delle necessità altrui?

3) Il lavoro che mi ha portato alla cortese attenzione della Accademia lo terminai venticinque anni fa, quando facevo parte della comunità scientifica ed essenzialmente ne condividevo lo spirito e i valori. Sono uscito da quell'ambiente nel 1970 e, sebbene la ricerca scientifica abbia continuato ad appassionarmi, interiormente mi sono ritirato sempre più dal "milieu" scientifico. Nel frattempo, l'etica della comunità scientifica (perlomeno dei matematici) è decaduta al punto che il furto dichiarato tra colleghi (specialmente alle spese di coloro i quali non sono in condizione di difendersi) è quasi diventato la norma ed è, a ogni modo, tollerato da tutti, persino nei casi più evidenti e iniqui. A queste condizioni, accettare di partecipare al gioco dei premi e delle onorificenze significherebbe anche dare la mia approvazione a uno spirito e a una tendenza nel mondo scientifico che io considero come essere fondamentalmente malsana e per di più condannata a scomparire presto, essendo tale spirito e tendenza così rovinosi, spiritualmente, intellettualmente e materialmente.

La terza ragione è per me di gran lunga la più importante, anche se non va intesa, in nessun modo, come una critica all'Accademia reale e al come intende amministrare i suoi *fondi. Non ho dubbi sul fatto che prima della fine del secolo degli eventi totalmente imprevisti cambieranno completamente il nostro concetto di "scienza" e dei suoi obiettivi e lo spirito con cui il lavoro scientifico è svolto. Certamente, a quel tempo l'Accademia reale sarà fra le istituzioni e le persone che giocheranno un ruolo importante in questo rinnovamento senza precedenti, dopo un equivalente collasso della civiltà senza precedenti. Mi dispiace dell'inconveniente che può aver causato a lei e all'Accademia reale il mio rifiuto di ricevere il premio Crafoord, soprattutto per il fatto che il premio era già stato pubblicizzato prima che i candidati avessero accettato. Tuttavia, non ho mai rinunciato ad esprimere la mia opinione sulla comunità scientifica e sulla "scienza ufficiale" di oggi nota alla stessa comunità e specialmente ai miei vecchi amici e ai miei giovani studenti del mondo matematico. Ciò che penso si trova in* Récoltes et Semailles*, una lunga riflessione sulla mia vita di matematico, sulla creatività in generale e sulla creatività scientifica in particolare; questo saggio è diventato inaspettatamente un ritratto dei principi morali del mondo matematico dal 1950 fino a oggi. In attesa che venga pubblicato sotto forma di libro, un'edizione provvisoria di duecento copie è stata spedita ai colleghi matematici, principalmente ai geometri algebrici (che adesso mi fanno onore commemorandomi). In un plico a parte, le invio le due parti introduttive per sua informazione personale. Di nuovo ringrazio lei e l'Accademia reale svedese e porgo le mie scuse per l'inconveniente non voluto. La prego di accettare i miei più sentiti omaggi.*

A. Grothendieck[15]

[15]Lettera pubblicata su *Le Monde* del 4 Maggio 1988.