49. Homomorphismes de $\mathcal{M}_{0,3}$, les groupes $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ généraux

A. Grothendieck

March 11, 2005

`[Les remarques entre crochets sont insérées par la rédaction.]`

`[page 550]`

49. Homomorphismes de $\mathcal{M}_{0,3}$, les groupes $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ généraux.

I) ([1]). Considérons un sous-groupe fermé $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}_{0,3}$, contenant $\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge}$, donc image inverse d'un sous-groupe fermé de $\mathbf{\Gamma}_{0,3}{}^{\sim}$. On suppose que celui-ci est 'suffisament gros' – disons qu'il contienne un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{\Gamma_Q} \subseteq \mathbf{\Gamma}_{0,3}{}^{\sim}$. Pour le moment, on suppose pour simplifier que $\mathcal{G} \subseteq \operatorname{Ker}\varepsilon_3$. En résumé :

$$(1) \qquad \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}_{0,3}^{\sim} , \qquad u \in \mathcal{G} \implies \mu(u) \equiv 1 \;\; (3) .$$

Cette dernière hypothèse signifie donc que pour tout $u \in \mathcal{G}$, on a $\alpha_0(u) \in \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge}$, donc on a

$$(2) \qquad \mathcal{G} \underset{\underline{\beta_0}}{\overset{\underline{\alpha_0}}{\rightrightarrows}} \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} ,$$

caractérisés par

$$(2') \qquad \begin{cases} u(\rho) = \operatorname{int}(\alpha_0)\rho , & \alpha_0 = \underline{\alpha_0}(u) , \\ u(\sigma) = \operatorname{int}(\beta_0)\sigma , & \beta_0 = \underline{\beta_0}(u) . \end{cases}$$

On considère

$$(3) \qquad \begin{array}{l} \mathcal{G}(0) = \mathcal{G} \cap \mathcal{M}_{0,3}^{\sim}(0) \\ \quad \cap\!| \\ \mathcal{G}[0] = \mathcal{G} \cap \mathcal{M}_{0,3}^{\sim}[0] = \operatorname{Norm}_{\mathcal{G}}(L_0^{\mathfrak{S}}) , \end{array}$$

de sorte que

$$(4) \qquad \mathcal{G} = \mathcal{G}(0) \cdot \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} \qquad \text{(produit semidirect)}$$

$$(5) \qquad \mathcal{G}[0] = \mathcal{G}(0) \cdot L_0^{\mathfrak{S}} \qquad \text{idem}$$

$$(6) \qquad \mathcal{G}[0] \cap \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} = L_0^{\mathfrak{S}} .$$

On a posé

$$(7) \qquad L_0^{\mathfrak{S}} = \text{sous-groupe fermé de } \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} \text{ engendré par } \varepsilon_0 ,$$

et on définit de même $L_1^{\mathfrak{S}}$, $L_\infty^{\mathfrak{S}}$.

Considérons un groupe profini $\mathcal{M}$, et un homomorphisme (continu) *surjectif*

$$(8) \qquad \varphi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{M} .$$

On pose

$$(9) \qquad \begin{cases} \varphi(\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge}) = \mathfrak{S} & \text{sous-groupe distingué de } \mathcal{M} \\ \varphi(\mathcal{G}(0)) = \mathcal{M}(0) \\ \varphi(\mathcal{G}[0]) = \mathcal{M}[0] \\ \varphi(L_0^{\mathfrak{S}}) = L_0 . \end{cases}$$

[1]Où on se met dans le bain ... Toute cette section I semble entièrement inutile pour la suite, c'est un tâtonnement préliminaire qui débouche sur la section II, p. 553.

Donc ce sont des sous-groupes fermés de $\mathcal{M}$, satisfaisant

$$\mathcal{M}(0) \subseteq \mathcal{M}[0] \subseteq \mathrm{Norm}_{\mathcal{M}}(L_0) \tag{10}$$

$$L_0 \subseteq \mathfrak{S} \cap \mathcal{M}[0] \,. \tag{11}$$

Par abus de langage, on désigne encore par ρ, σ, ε_0, ε_1 ... les images de ces éléments dans $\mathfrak{S}$, qui y satisfont donc les relations connues dans $\mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3}$, en particulier

$$\sigma^2 = \rho^3 = 1 \,, \qquad \sigma\rho = \varepsilon_0 \,, \qquad \rho\sigma = \varepsilon_1 \,, \qquad \varepsilon_1 = \sigma(\varepsilon_0) = \rho(\varepsilon_0) \,. \tag{12}$$

Les restrictions des applications α_0, β_0 de (2, 2′) à $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0]$ seront plutôt notées α, β, où α, β sont en fait des applications

$$S\mathcal{G} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\text{image inverse de } \mathcal{G} \text{ dans } S\mathcal{M}^{\sim}_{0,3}}_{=\{(u,f)\in\mathcal{G}\times\mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3} \ \mid\ fu\in\mathcal{G}[0]\}} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3} \tag{13}$$

dont on regarde les restrictions au sous-groupe ($\simeq \mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0]$) de $S\mathcal{G}$ défini par la relation $f = 1$.

Composant $\underline{\alpha}, \underline{\beta} : \mathcal{G}[0] \rightrightarrows \mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3}$ avec $\varphi|\mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3}$, on trouve des applications, encore notées $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ (ou $\underline{\alpha}^{\mathcal{M}}$, $\underline{\beta}^{\mathcal{M}}$ en cas de confusion possible)

$$\mathcal{G}[0] \underset{\underline{\beta}}{\overset{\underline{\alpha}}{\rightrightarrows}} \mathfrak{S} \,, \tag{14}$$

satisfaisant donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(\rho) & = & \mathrm{int}(\alpha)\rho \\ u(\sigma) & = & \mathrm{int}(\beta)\sigma \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \text{pour } u \in \mathcal{M}[0] \text{ de la forme } \varphi(u_0), \\ \text{et } \alpha = \alpha(u_0),\ \beta = \beta(u_0) \,. \end{array} \tag{15}$$

[page 551]

A priori, α et β dépendent du choix de u_0 dont u provient, pas seulement de u – mais

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha\rho(\alpha)^{-1} & = & [u,\rho] \\ \beta\sigma(\beta)^{-1} & = & [u,\sigma] \end{array} \right. \tag{16}$$

n'en dépendent pas. Si on pose

$$T_\rho = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathcal{M}}(\rho) \,, \qquad T_\sigma = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathcal{M}}(\sigma) \,, \tag{17}$$

on sait donc que, modulo T_ρ resp. T_σ, α, β ne dépendent pas de u.

Hypothèse. $\alpha = \alpha(u_0)$, $\beta = \beta(u_0)$ ne dépendent que de $u = \varphi(u_0)$ (pour $u_0 \in \mathcal{G}[0]$).

On va exprimer cette hypothèse de façon un peu différente, en introduisant

$$J = \mathrm{Ker}(\mathcal{G}[0] \longrightarrow \mathcal{M}[0]) \,, \tag{18}$$

on veut donc que pour

$$u_0' = \delta_0 u_0 \,,$$

avec $u_0 \in \mathcal{G}[0]$, $\delta_0 \in J$, on ait

$$\alpha(u_0') \;=\; \alpha(u_0) \;, \qquad \beta(u_0') \;=\; \beta(u_0) \;.$$

Soient $\alpha_0 = \underline{\alpha}(u_0)$, $\beta_0 = \underline{\beta}(u_0)$, $\alpha_0' = \underline{\alpha}(u_0')$, $\beta_0' = \underline{\beta}(u_0')$, $\overline{\alpha}_0 = \underline{\alpha}(\delta_0)$, $\overline{\beta}_0 = \underline{\beta}(\delta_0)$ *dans* $\mathcal{G}$, de sorte qu'on aura, par les formules de cocycles dans $\mathcal{G}$,

$$\alpha_0' \;=\; \delta_0(\alpha_0)\overline{\alpha}_0 \;, \qquad \beta_0' \;=\; \delta_0(\beta_0)\overline{\beta}_0 \;,$$

d'où, en appliquant φ et notant que

$$\varphi(\delta_0(\alpha_0)) \;=\; \underbrace{\varphi(\delta_0)}_{=1}(\varphi(\alpha_0)) \;=\; \varphi(\alpha_0) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \alpha \;, \qquad \text{et de même}$$
$$\varphi(\delta_0(\beta_0)) \;=\; \varphi(\beta_0) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \beta$$

(19) $$\alpha' \;=\; \alpha\overline{\alpha} \;, \qquad \beta' \;=\; \beta\overline{\beta} \qquad \text{dans } \mathfrak{S} \;,$$

où α, β, α', β', $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ sont les images par φ des quantités α_0 etc. dans $\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge}$. Donc l'hypothèse signifie aussi

(20) $$\forall\, \delta_0 \in J \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker}(\mathcal{G}[0] \longrightarrow \mathcal{M}[0]), \text{ on a } \alpha^{\pi}(\delta_0), \beta^{\pi}(\delta_0) \in \operatorname{Ker}\varphi.$$

Quand cette hypothèse est satisfaite, on a donc des applications

(21) $$\mathcal{M}[0] \underset{\underline{\beta}}{\overset{\underline{\alpha}}{\rightrightarrows}} \mathfrak{S}$$

factorisant (14), et satisfaisant donc

(22) $$\begin{cases} u(\rho) \;=\; \operatorname{int}(\alpha)\rho \\ u(\sigma) \;=\; \operatorname{int}(\beta)\sigma \end{cases} \qquad \text{pour } u \in \mathcal{M}[0],\ \alpha = \underline{\alpha}(u),\ \beta = \underline{\beta}(u) \;,$$

qui paraphrasent (21).

D'ailleurs, posant

(23) $$\xi \;=\; \alpha\rho(\alpha)^{-1} \;, \qquad \eta \;=\; \beta\sigma(\beta)^{-1} \;,$$

les relations (22) s'écrivent aussi

(24) $$u(\rho) \;=\; \xi\rho \;, \qquad u(\sigma) \;=\; \eta\sigma$$

et on aura

(25) $$\xi \;=\; [u,\rho] \;, \qquad \eta \;=\; [u,\sigma] \;,$$

et de plus

(26) $$\xi \;=\; \eta l_1^{\nu} \;, \qquad \text{où } \nu = \tfrac{\mu-1}{2} \in \hat{\mathbf{Z}} \quad (\mu \text{ le multiplicateur de } u) \;,$$

qui provient de la relation analogue dans $\mathfrak{S}_{0,3}^{+}$. (On suppose pour fixer les idées que l'homomorphisme

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\chi^{\mathcal{G}}} \hat{\mathbf{Z}}^{*} \qquad \text{('multiplicateur')}$$

se factorise par

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\chi^{\mathcal{M}}} \hat{\mathbf{Z}}^* , \tag{27}$$

de sorte qu'on a une notion de multiplicateur ($\in \hat{\mathbf{Z}}^*$) pour les $u \in \mathcal{M}$.)

Considérons l'homomorphisme naturel

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}[0] & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{int}(u)|\mathfrak{S} , \end{array} \tag{28}$$

on voit sur (22) ou sur (24) qu'il est connu quand on connaît

`[page 552]`

les fonctions $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$: $\mathcal{M}[0] \longrightarrow \mathfrak{S}$, et même quand on connaît seulement ξ, η : $\mathcal{M}[0] \longrightarrow \mathfrak{S}$ ([2]). Si d'ailleurs on pose

$$\mathcal{M}'[0] \ = \ \mathrm{Im}(\mathcal{M}[0] \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{S})) , \tag{29}$$

ces dernières fonctions ξ, η sont déjà définies sur $\mathcal{M}'[0]$ – alors qu'il n'est pas clair qu'il en soit de même de α, β, quand $\mathcal{M}[0]$ n'opère pas fidèlement sur $\mathfrak{S}$. On a ainsi une application $(\underline{\xi}, \underline{\eta})$ d'un certain sous-groupe $\mathcal{M}'[0] \subseteq \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{S})}(L_0)$ dans l'ensemble des solutions de l'équation en ξ, η (26) qu'on écrira simplement

$$\eta^{-1}\xi \ \in \ L_1 \qquad \texttt{[}^3\texttt{]} , \tag{31}$$

relation qui implique (26) (avec la forme précise de l'exposant ν) si on suppose p.ex. $\mathfrak{S}$ assez gros pour que $\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} \longrightarrow \mathrm{SL}(2, \hat{\mathbf{Z}})$ se factorise par $\mathfrak{S}$ – ce qu'on va supposer, pour nous simplifier la vie.

De façon plus précise, soit

$$\Sigma \ = \ \Sigma_{\mathfrak{S},\rho,\sigma} \ = \ \left\{ (\xi,\eta) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{a)} & \xi\rho \text{ conjugué à } \rho \text{ dans } \mathfrak{S}, \text{ i.e. } \xi \text{ de la forme } \\ & [\alpha,\rho] = \alpha\rho(\alpha)^{-1}. \\ \text{b)} & \xi\sigma \text{ conjugué à } \sigma \text{ dans } \mathfrak{S}, \text{ i.e. } \eta \text{ de la forme } \\ & [\beta,\sigma] = \beta\sigma(\beta)^{-1}. \\ \text{c)} & \eta^{-1}\xi \in L_1, \text{ i.e. } \exists\, \nu' \in \hat{\mathbf{Z}} \text{ tel que } \xi = \eta\varepsilon_1^{\nu'}. \end{array} \right\} \subseteq \ \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \tag{32}$$

`[plutôt` $\eta\sigma$ `conjugué à` σ `dans b)]`, et soit $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S})$ un automorphisme de $\mathfrak{S}$, et posons

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi \ = \ [u,\rho] \ = \ u\rho u^{-1}\rho^{-1} \ = \ u(\rho)\rho^{-1} , & \text{i.e. } u(\rho) \ = \ \xi\rho \\ \eta \ = \ [u,\sigma] \ = \ u(\sigma)\sigma^{-1} , & \text{i.e. } u(\sigma) \ = \ \eta\sigma \end{array} \right. , \quad \text{cf. (24), (25),} \quad \texttt{[}^4\texttt{]} , \tag{34}$$

alors dire que $\xi\rho$ $(= u(\rho))$ est conjugué à ρ signifie que u fixe la classe de conjugaison de ρ, dire que $\eta\sigma$ $(= u(\sigma))$ est conjugué de σ signifie que u fixe la classe de conjugaison de

[2] car ρ, σ engendrent topologiquement $\mathfrak{S}$.

[3] `[(30) n'existe pas.]`

[4] `[(33) n'existe pas.]`

σ. Enfin la condition $\eta^{-1}\xi \in L_1$ s'écrit aussi, comme

$$\begin{aligned} \eta^{-1}\xi &= (\sigma u(\sigma^{-1}))(u(\rho)\rho^{-1}) \\ &= \sigma u(\sigma^{-1}\rho)\rho^{-1} \\ &= \sigma\Big(u(\underbrace{\sigma^{-1}\rho}_{=\varepsilon_0})\,\underbrace{(\rho^{-1}\sigma)}_{=\varepsilon_0^{-1}}\Big) \qquad (^5) \\ &= \sigma(u(\varepsilon_0)\varepsilon_0^{-1}) , \end{aligned}$$

sous la forme

$$\sigma(u(\varepsilon_0)\varepsilon_0^{-1}) \in L_1 , \qquad \text{i.e. } u(\varepsilon_0)\varepsilon_0^{-1} \in L_0$$

(puisque $L_0 = \sigma^{-1}(L_1)$), ou encore (puisque $\varepsilon_0 \in L_0$) $u(\varepsilon_0) \in L_0$, soit (puisque ε_0 engendre L_0)

$$u(L_0) = L_0 ,$$

i.e. que u *normalise* L_0 [6].

Soit donc

(35) $$\tilde{B}'_0 \overset{\text{def}}{=} \left\{ u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}) \;\middle|\; \begin{array}{l} u \text{ fixe } \texttt{[la]} \text{ classe de conjugaison de } \rho \text{ et celle de } \sigma \\ u \text{ normalise } L_0 \end{array} \right\} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}) ,$$

de sorte qu'on a une application (injective parce que ρ, σ engendrent $\mathfrak{S}$)

(36) $$\begin{array}{ccc} \tilde{B}'_0 & \hookrightarrow & \Sigma \\ u & \longmapsto & \Big([u,\rho] = u(\rho)\rho^{-1} \;,\; [u,\sigma] = u(\sigma)\sigma^{-1}\Big) . \end{array}$$

`[page 553]`

(37) *Hypothèse fondamentale sur $\mathfrak{S}$, muni de ρ, σ, d'où $\varepsilon_0 = \sigma^{-1}\rho$, $\varepsilon_1 = \rho\sigma^{-1} = \sigma(\varepsilon_0) = \rho(\varepsilon_0)$:*

a) $\mathfrak{S}$ est engendré topologiquement par ρ, σ.

b) L'application (36) (injective par a)) est bijective.

La condition b) signifie donc que pour $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$, satisfaisant une relation

$$\underbrace{\alpha\rho(\alpha)^{-1}}_{=\xi} = \underbrace{\beta\sigma(\beta)^{-1}}_{=\eta}\varepsilon_1^{\nu'} , \qquad \nu' \text{ convenable,}$$

il existe $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S})$ tel qu'on ait

$$\begin{array}{llll} [u,\rho] = \alpha\rho(\alpha)^{-1} , & \text{i.e. } u(\rho) = \mathrm{int}(\alpha)(\rho) , & \text{i.e. } u(\rho) = \xi\rho \\ [u,\sigma] = \beta\sigma(\beta)^{-1} , & \text{i.e. } u(\sigma) = \mathrm{int}(\beta)(\sigma) , & \text{i.e. } u(\sigma) = \eta\sigma \end{array}$$

---

[5] NB $\sigma^{-1} = \sigma$.

[6] Dans cet argument, on n'a utilisé que la relation $\sigma_0^{-1}\rho = \varepsilon_0$ `[plutôt` $\sigma^{-1}\rho = \varepsilon_0$`]` et le fait que ε_0 engendre L_0, et pas que $\sigma^2 = 1$ ou $\rho^3 = 1$ p.ex.

(on aura donc nécessairement $u \in \tilde{B}'_0$, et u sera unique si on a a)).

Ainsi, sur l'ensemble des $R_{\rho,\sigma}$ des (ξ,η) satisfaisant a) b) c), on aura une structure de groupe, déduite par transport de structure de celle de $\tilde{B}'_0$ etc.

II) Les groupes $\mathcal{M}'_{\rho,\sigma}$ etc.

Reprenons la situation ab ovo, en oubliant (au moins pour le moment) $\mathcal{G}$, φ etc.

([7]). Soit $\mathfrak{S}$ un groupe – on se place pour le moment, soit dans le contexte des groupes discrètes, soit dans celui des groupes profinis, au choix. On va (pour fixer les idées) prendre celui des groupes profinis. On suppose donnés

$$\rho,\ \sigma\ \in\ \mathfrak{S}\ , \tag{1}$$

on pose

$$\varepsilon_0\ =\ \sigma^{-1}\rho\ , \qquad \varepsilon_1\ =\ \rho\sigma^{-1}\ =\ \sigma(\varepsilon_0)\ =\ \rho(\varepsilon_0) \qquad ([8]) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} L_0 &= \text{sous-groupe fermé engendré par } \varepsilon_0 \\ L_1 &= \text{sous-groupe fermé engendré par } \varepsilon_1\ , \\ &\quad \text{donc } L_1 = \rho(L_0) = \sigma(L_0)\ . \end{aligned} \tag{3}$$

On considère

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}) \xrightarrow{\Phi = (\underline{\xi},\underline{\eta})} \mathfrak{S}\times\mathfrak{S} \tag{4}$$

défini par

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \underline{\xi}(u) & = & [u,\rho] & = & u\rho u^{-1}\rho^{-1} & = & u(\rho)\rho^{-1} \qquad \text{donc } u(\rho)=\xi\rho \\ & & & = & u\rho(u)^{-1} & & \qquad (\xi=\underline{\xi}(u)) \\ \underline{\eta}(u) & = & [u,\sigma] & = & u\sigma u^{-1}\sigma^{-1} & = & u(\sigma)\sigma^{-1} \qquad \text{donc } u(\sigma)=\eta\sigma \\ & & & = & u\sigma(u)^{-1} & & \qquad (\eta=\underline{\eta}(u))\ . \end{array}\right. \tag{5}$$

Donc pour $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S})$, et $\xi = \underline{\xi}(u)$, $\eta = \underline{\eta}(u)$, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} u \text{ fixe la classe de } \mathfrak{S}\text{-conjugaison de } \rho & \Longleftrightarrow & \xi\rho \text{ conjugué à } \rho \\ & \Longleftrightarrow & \xi = \alpha\rho(\alpha)^{-1}\ (\alpha\in\mathfrak{S}) \\ u \text{ fixe la classe de } \mathfrak{S}\text{-conjugaison de } \sigma & \Longleftrightarrow & \eta\sigma \text{ conjugué à } \sigma \\ & \Longleftrightarrow & \eta = \beta\rho(\beta)^{-1}\ (\beta\in\mathfrak{S}) \\ \multicolumn{3}{l}{u \text{ normalise } L_0 \Longleftrightarrow \eta^{-1}\xi\in L_1 \Longleftrightarrow \xi = \eta\varepsilon_1^{\nu} \text{ avec } \nu\in\hat{\mathbf{Z}} \text{ convenable.}} \end{array}\right. \tag{6}$$

---

[7] Pour une rectification systématique des notations qui suivent, cf. page 564, *remarques*.

[8] I.e. on a entre $\varepsilon_0 = l'_0$, $\sigma = l'_1$ et $\rho^{-1} = l'_\infty$ une relation $l'_\infty l'_1 l'_0 = 1$.

[page 554]

Soient

$$(7) \qquad B_{\rho,\sigma} \;=\; \{u \mid \text{satisfaisant les trois conditions (6)}\} \;\subseteq\; \mathrm{Aut}(\mathfrak{S})$$

$$(8) \qquad \Sigma_{\rho,\sigma} \;=\; \left\{ (\xi,\eta) \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi = \alpha\rho(\alpha)^{-1}, \text{ i.e. } \xi\rho \text{ conjugué à } \rho, \\ \eta = \beta\sigma(\beta)^{-1}, \text{ i.e. } \eta\sigma \text{ conjugué à } \sigma \; (\alpha,\beta \in \mathfrak{S}) \\ \eta^{-1}\xi \in L_1, \text{ i.e. } \xi = \eta\varepsilon_1^{\nu} \; (\nu \in \hat{\mathbf{Z}}) \end{array} \right\},$$

de sorte que $B_{\rho,\sigma}$ est l'image inverse de $\Sigma_{\rho,\sigma}$ par (4), et on a une application induite

$$(9) \qquad B_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\varphi_0 = \varphi_{\rho,\sigma}} \Sigma_{\rho,\sigma} \;.$$

On suppose

$$(10) \qquad \boxed{\begin{cases} \text{a)} \quad \rho,\,\sigma \text{ engendrent } \mathfrak{S} \text{ topologiquement.} \\ \text{b)} \quad \text{L'application (9) (injective par a)) est surjective (donc bijective).} \end{cases}} \qquad ({}^{9})\;.$$

On transporte alors par φ la structure de groupe de $B_{\rho,\sigma}$ à $\Sigma_{\rho,\sigma}$. On pose

$$(11) \qquad u_{\xi,\eta} \;=\; \varphi^{-1}(\xi,\eta) \;\in\; B_{\rho,\sigma} \qquad ((\xi,\eta) \in \Sigma_{\rho,\sigma})\;,$$

de sorte que $u_{\xi,\eta}$ est caractérisé par

$$(12) \qquad \begin{cases} u_{\xi,\eta}(\rho) &=& \xi\rho \\ u_{\xi,\eta}(\sigma) &=& \eta\sigma\;. \end{cases}$$

L'hypothèse b) signifie donc que , dès que $(\xi,\eta) \in \Sigma_{\rho,\sigma}$, i.e. $\xi\rho$ conjugué à η, $\eta\sigma$ conjugué à η, et $\eta^{-1}\xi \in L_1$, il existe un automorphisme $u_{\xi,\eta}$ de $\mathfrak{S}$ satisfaisant (12) (et qui sera unique par (10 a)). La loi de groupe sur $\Sigma_{\rho,\sigma}$ s'explicite ainsi :

$$(13) \qquad (\xi',\eta')(\xi,\eta) \;=\; (\xi'',\eta'') \qquad \text{avec} \begin{cases} \xi'' &=& u_{\xi',\eta'}(\xi)\xi' \\ \eta'' &=& u_{\xi',\eta'}(\eta)\eta' \end{cases} .$$

Considérons l'homomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}) \\ g & \longmapsto & \mathrm{int}(g)\;, \end{array}$$

l'image inverse de $B_{\rho,\sigma}$ n'est autre que le normalisateur de L_0 dans $\mathfrak{S}$, soit $\mathcal{N}_0$. On veut construire alors un groupe $G_{\rho,\sigma}$, contenant $\mathfrak{S}$ comme sous-groupe invariant, et dans lequel s'envoie $B_{\rho,\sigma}$, de façon que l'action tautologique de $B_{\rho,\sigma}$ sur $\mathfrak{S}$ soit déduite de cet homomorphisme, et que $G_{\rho,\sigma}$ soit engendré par $\mathfrak{S}$ et l'image de $B_{\rho,\sigma}$, notée $B'_{\rho,\sigma}$, qui

[9] Attention, cette condition est satisfaite pour $\mathfrak{S} = \mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}})'$! (Le signe $\varepsilon = \varepsilon_3(\mu)$ ne gêne pas au niveau ξ, η ...)

contient $\mathcal{N}_0$. Si le centre de $\mathfrak{S}$ est trivial, i.e. $\mathfrak{S} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{S})$ ($\mathfrak{S}$ sous-groupe distingué), il suffit de prendre le sous-groupe $G_{\rho,\sigma}$ de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S})$ engendré par $\mathfrak{S}$ et $B_{\rho,\sigma}$. Mais l'hypothèse que le centre de $\mathfrak{S}$ est trivial n'est pas heureuse – p.ex. elle n'est pas satisfaite si $\mathfrak{S} = \mathrm{SL}(2, \hat{\mathbf{Z}})/\pm 1$. Il me semble que l'introduction de $\mathcal{N}_0$ (sur lequel en pratique nous n'avons aucun contrôle)

`[page 555]`

n'était pas non plus judicieuse, et la condition $B'_{\rho,\sigma} \supseteq \mathcal{N}_0$ – il suffira de $B'_{\rho,\sigma} \supseteq L_0$. Je vais donc considérer

$$(14)\qquad \begin{cases} S_0G_{\rho,\sigma} \overset{\text{def}}{=} B_{\rho,\sigma} \cdot \mathfrak{S} & \text{le produit semi-direct, et} \\ L_0 \overset{i}{\hookrightarrow} S_0G_{\rho,\sigma} & \\ g \longmapsto \mathrm{int}(g) \cdot g^{-1} \, . & \end{cases}$$

L'image de cet homomorphisme est un sous-groupe distingué, car

a) il commute à $\mathfrak{S}$ (trivial), et

b) il est invarié par $B_{\rho,\sigma}$, car on aura pour $u \in B_{\rho,\sigma}$

$$\mathrm{int}(u)\,(i(g)) \;=\; \mathrm{int}(u)\left(\mathrm{int}(g) \cdot g^{-1}\right) \;=\; \mathrm{int}(u(g)) \cdot \underbrace{\mathrm{int}(u(g^{-1}))}_{u(g^{-1}) = u(g)^{-1}} \;=\; i(u(g))$$

(i.e. i commute aux actions de $B_{\rho,\sigma}$, opérant sur L_0 par restriction à L_0 de l'opération tautologique de $B_{\rho,\sigma}$ sur $\mathfrak{S}$, et sur $S_0G_{\rho,\sigma} \supseteq B_{\rho,\sigma}$ par automorphisme intérieur).

On peut donc considérer

$$(15)\qquad G_{\rho,\sigma} \overset{\text{def}}{=} S_0G_{\rho,\sigma}/i(L_0) \, ,$$

alors les homomorphismes d'inclusion

$$B_{\rho,\sigma} \hookrightarrow S_0G_{\rho,\sigma} \, , \qquad \mathfrak{S} \longrightarrow S_0G_{\rho,\sigma}$$

donnent, par composition avec $S_0G_{\rho,\sigma} \longrightarrow G_{\rho,\sigma}$, des homomorphismes

$$(16)\qquad \mathfrak{S} \hookrightarrow G_{\rho,\sigma} \, , \qquad B_{\rho,\sigma} \hookrightarrow G_{\rho,\sigma} \, ,$$

rendant commutatif le diagramme

$$(17)\qquad \begin{tikzcd} & \mathfrak{S} \arrow[dr] & \\ L_0 \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & G_{\rho,\sigma} \, . \\ & B_{\rho,\sigma} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

On notera

$$(18)\qquad \mathrm{Ker}(\mathfrak{S} \longrightarrow G_{\rho,\sigma}) \;=\; L_0 \cap \mathrm{Centr}(\mathfrak{S}) \;=\; \mathrm{Ker}(L_0 \longrightarrow B_{\rho,\sigma}) \, .$$

Donc le cas $\mathfrak{S} = \mathrm{SL}(2, \hat{\mathbf{Z}})'$ (avec ρ, σ comme à l'accoutumée on aura $L_0 \cap \mathrm{Centr}(\mathfrak{S}) = 1$. Donc il ne semble pas a priori qu'il y ait des inconvénients majeurs à supposer que

(18) $$L_0 \cap \mathrm{Centr}(\mathfrak{S}) \; = \; \{1\} \;, \qquad \text{i.e. } \mathfrak{S} \hookrightarrow G_{\rho,\sigma} \text{ injectif} \qquad$$ [[10]] .

Notons que l'image de

$$\begin{array}{ccc} L_0 & \longrightarrow & B_{\rho,\sigma} \\ l & \longmapsto & \mathrm{int}(l) \end{array}$$

(composé de (14) et de la projection $S_0 G_{\rho,\sigma} \longrightarrow B_{\rho,\sigma}$) est évidemment invariante, et posant

(19) $$\Upsilon_{\rho,\sigma} \; = \; B_{\rho,\sigma} / \operatorname{Im} L_0$$

on trouve

(20) $$G_{\rho,\sigma} / \mathfrak{S}_{\rho,\sigma} \; \simeq \; B_{\rho,\sigma} / L_0 \; \simeq \; \Upsilon_{\rho,\sigma} \;,$$

i.e. [on a un] homomorphisme de suites exactes

(20 bis) $$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & L_0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & B_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \underbrace{\mathfrak{S}}_{= SG_{\rho,\sigma}} \arrow[r] & G_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

NB Dans le cas $\mathfrak{S} = \mathrm{SL}(2, \hat{\mathbf{Z}})'$, etc., $B_{\rho,\sigma} \subseteq \mathrm{GL}(\hat{\mathbf{Z}})$ est le groupe noté précédemment B'_0 (alors plutôt son image isomorphique $\tilde{B}'_0$), et l'homomorphisme $\det | B'_0 = B_{\rho,\sigma}$ (trivial sur L_0), induit par passage au quotient un *isomorphisme*

(21) $$\Upsilon_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \;,$$

et on voit, utilisant l'isomorphisme

$$\begin{aligned} B'_0 \; &= \; \Upsilon_0 \cdot L_0 \;\; \text{(semi-direct)} \;, \quad \text{où } \Upsilon_0 \xrightarrow{\sim} B'_0 / L_0 \simeq \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \\ \text{i.e. } \; B_{\rho,\sigma} \; &\simeq \; \Upsilon_{\rho,\sigma} \cdot L_0 \;, \end{aligned}$$

que dans ce cas on a

(22) $$G_{\rho,\sigma} \; = \; \mathrm{GL}(2, \hat{\mathbf{Z}})' \,. \qquad$$ ([11])

[page 556]

Mais dans les cas plus généraux auxquels nous aspirons, il ne faut pas du tout s'attendre à ce que $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ soit aussi petit – p.ex. qu'il soit commutatif. Par exemple dans le cas 'universel' $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3}$, on aura

(23) $$B_{\rho,\sigma} \; = \; \mathcal{M}_{0,3}{}^{\sim}[0]' \; = \; \mathrm{Ker}(\mathcal{M}_{0,3}{}^{\sim}[0] \xrightarrow{\varepsilon_3} \{\pm 1\}) \;,$$

[10] [Deux fois (18).]

[11] Dans le cas où on part de $\mathrm{SL}(2, \hat{\mathbf{Z}})$, ρ, σ, on tombe sur $G_{\rho,\sigma} = \mathrm{GL}(2, \hat{\mathbf{Z}})$ [?] …

donc

$$\Upsilon_{\rho,\sigma} \simeq \mathbf{\Gamma}_{0,3}{}^{\sim\prime} \qquad (\supseteq \mathbf{\Gamma}'_{\mathbf{Q}}\ !)\ . \tag{24}$$

Par contre, on doit pouvoir sans inconvénient postuler l'existence d'un scindage canonique de l'extension $B_{\rho,\sigma}$ de $\Gamma_{\rho,\sigma}$ [plutôt $\Upsilon_{\rho,\sigma}$] par L_0. En fait, si on suppose, dans le cas général, où néanmoins on suppose $\sigma^2 = \rho^3 = 1$, i.e. $\mathfrak{S}$ quotient de $\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge}$, que le quotient $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge}$ est assez grand pour s'envoyer dans $\mathrm{GL}(\hat{\mathbf{Z}})$, alors $B_{\rho,\sigma} \simeq \Sigma_{\rho,\sigma}$ s'envoie dans $\tilde{B}'_0$, et l'image inverse de $\tilde{T}_0$ est un sous-groupe (qu'on pourrait noter $T_{\rho,\sigma}$)

$$T_{\rho,\sigma} \subseteq B_{\rho,\sigma}\ , \qquad T_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\sim} \Upsilon_{\rho,\sigma}\ , \tag{25}$$

qui est un sous-groupe section, pour $B_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$, et aussi (en tant que sous-groupe de $G_{\rho,\sigma}$) pour $G_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$, de sorte qu'on aura

$$B_{\rho,\sigma} \simeq T_{\rho,\sigma} \cdot L_0\ , \qquad G_{\rho,\sigma} \simeq T_{\rho,\sigma} \cdot \mathfrak{S} \qquad \text{(produits semi-directs)}\ . \tag{26}$$

Soit maintenant

$$\left\{ \begin{array}{lll} S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} & \stackrel{\text{def}}{=} & \{(\alpha,\beta) \mid \underbrace{\alpha\rho(\alpha)^{-1}}_{=\xi} = \underbrace{\beta\sigma(\beta)^{-1}}_{=\eta} \varepsilon_1^{\nu}, \text{ pour } \nu \in \hat{\mathbf{Z}} \text{ convenable, i.e. } \eta^{-1}\xi \in L_0\} \\ & \subseteq & \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}\ . \end{array} \right. \tag{27}$$

On a une application canonique

$$\begin{array}{rcll} S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \Sigma_{\rho,\sigma} & \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & (\xi,\eta)\ , & \qquad \xi = \alpha\rho(\alpha)^{-1},\ \eta = \beta\sigma(\beta)^{-1}\ , \end{array} \tag{28}$$

qui est surjective par définition de $\Sigma_{\rho,\sigma}$, et en fait par l'hypothèse (10), on a presque une *section canonique*

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} \\ (\xi,\eta) & \longmapsto & u_{\xi,\eta} \end{array}$$

[c.à.d. $(u_{\xi,\eta}, u_{\xi,\eta})$], à cela près que $u_{\xi,\eta}$ n'est pas dans $\mathfrak{S}$, mais seulement dans $G_{\rho,\sigma}$. Nous allons considérer alors l'ensemble plus gros

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{G}_{\rho,\sigma} & \stackrel{\text{def}}{=} & \{(\alpha,\beta) \mid \underbrace{\alpha\rho(\alpha)^{-1}}_{=\xi} = \underbrace{\beta\sigma(\beta)^{-1}}_{=\eta} \varepsilon_1^{\nu}\ , \quad \text{pour } \nu \in \hat{\mathbf{Z}} \text{ convenable}\} \\ & \subseteq & G_{\rho,\sigma} \times G_{\rho,\sigma} \end{array} \right. \qquad (^{12})\ , \tag{29}$$

de sorte que l'on aura

$$S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} = \mathcal{G}_{\rho,\sigma} \cap (\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}) \tag{30}$$

(en supposant (18) pour simplifier).

[12] **NB** On aura aussi $\xi = \alpha(\rho)\rho^{-1}$, $\eta = \beta(\sigma)\sigma^{-1}$, donc $\xi, \eta \in \mathfrak{S}$ (puisque $\mathfrak{S}$ invariant dans $G_{\rho,\sigma}$)

`[page 557]`

On trouve encore

$$(31)\quad \begin{cases} \mathcal{G}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Sigma_{\rho,\sigma} \\ (\alpha,\beta) \longmapsto (\xi,\eta)\ , \qquad \begin{array}{lllll} \xi & = & \alpha\rho(\alpha)^{-1} & = & [\alpha,\rho] & = & \alpha(\rho)\rho^{-1} \\ \eta & = & \beta\sigma(\beta)^{-1} & = & [\beta,\sigma] & = & \beta(\sigma)\sigma^{-1} \end{array} \end{cases}$$

(par définition de $B_{\rho,\sigma}$ on trouve bien que les (ξ,η) associés aux (α,β) sont dans $\Sigma_{\rho,\sigma}$). Cette fois-ci l'hypothèse (10) implique qu'on a une *section canonique*

$$(32)\qquad \begin{array}{ccc} \Sigma_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \mathcal{G}_{\rho,\sigma} \\ (\xi,\eta) & \longmapsto & (u_{\xi,\eta}, u_{\xi,\eta}) \end{array}$$

et on trouve (comme dans §48 III) :

Théorème. *Considérons les sous-groupes de* $G_{\rho,\sigma}$

$$(33)\qquad \begin{cases} Z_\rho & = & \underline{\mathrm{Centr}}_{G_{\rho,\sigma}}(\rho) \\ Z_\sigma & = & \underline{\mathrm{Centr}}_{G_{\rho,\sigma}}(\sigma)\ , \end{cases} \qquad ([13])$$

et le groupe produit

$$B_{\rho,\sigma}\ \times\ T_\rho\ \times\ T_\sigma\ ,$$

alors on a une application bijective

$$(34)\qquad \begin{array}{ccc} B_{\rho,\sigma}\times T_\rho \times T_\sigma & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{G}_{\rho,\sigma} \\ (u,a,b) & \longmapsto & (ua^{-1}, ub^{-1}). \end{array}$$

Corollaire. *Considérons les homomorphismes de groupes*

$$(35)\quad \delta_B\ :\ B_{\rho,\sigma}\longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}\ ,\ \delta_G\ :\ G_{\rho,\sigma}\longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}\ ,\ \delta_\rho\ :\ Z_\rho \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}\ ,\ \delta_\sigma\ :\ Z_\sigma \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}\ ,$$

où δ_G est l'homomorphisme canonique de passage au quotient par $\mathfrak{S}_{\rho,\sigma} = \mathfrak{S}$, et δ_ρ, δ_σ, δ_B sont les composés de δ_G avec les inclusions $Z_\rho \hookrightarrow G_{\rho,\sigma}$, $Z_\sigma \hookrightarrow G_{\rho,\sigma}$, `[une ligne manque]` ([14]). *Soit*

$$(36)\qquad S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(u,a,b) \mid \delta_G(u) = \delta_\rho(a) = \delta_\sigma(b)\} \subseteq B_{\rho,\sigma}\times Z_\rho \times Z_\sigma \qquad ([15],[16])$$

I.e.

$$(37)\qquad S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma} = B_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z_\sigma\ .$$

[13]NB dans le cas $\mathfrak{S} = \mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}})'$ etc., on aura

$$\begin{array}{ccc} Z_\rho & = & T_\rho \\ Z_\sigma & = & N_\sigma\ . \end{array}$$

[14]Par définition de $B_{\rho,\sigma}$ (7), on voit que $Z_\rho \longrightarrow B_{\rho,\sigma}$ et $Z_\sigma \longrightarrow B_{\rho,\sigma}$ sont épimorphes, donc aussi leurs composés δ_ρ, δ_σ avec $B_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$, donc les quatre homomorphismes (35) sont épimorphes ...

[15]Noté $S_0\mathcal{T}_{\rho,\sigma}$ dans le §48, IX ff.

[16]NB La lettre S ici est inspirée de l'usage de cette lettre pour les 'groupes de Teichmüller spéciaux', et n'a pas donc le même sens que dans SZ_ρ, SZ_σ, où elle indique que l'on prend le noyau de δ_ρ, δ_σ (jouant le rôle d'un déterminant ...).

Alors on a une bijection

$$(38)\qquad \begin{cases} S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma} & \xrightarrow{\sim} & S_0\mathcal{G}_{\rho,\sigma} & \textit{(défini dans (27))} \\ (u,a,b) & \longmapsto & (\xi,\eta)\ , & \textit{avec}\ \xi = ua^{-1},\ \eta = ub^{-1}\ . \end{cases}$$

Scholie. Par les bijections (34), (38), on transporte sur $\mathcal{G}_{\rho,\sigma}$, $S_0\mathcal{G}_{\rho,\sigma}$ les structures de groupe naturelles de $\Gamma^{0\sim}_{\rho,\sigma}$, $\Gamma^0_{\rho,\sigma}$. Explicitant cette structure de groupe, on trouve notamment pour $S\mathcal{G}_{\rho,\sigma}$

$$(39)\qquad \begin{cases} (\alpha',\beta')(\alpha,\beta) = (\alpha'',\beta'')\ , & \text{avec}\quad \alpha'' = u'(\alpha)\alpha',\ \beta'' = u'(\beta)\beta' \\ u' = u_{\xi',\eta'} : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}\ , & \text{défini par} \begin{cases} u(\rho) = \xi\rho = \operatorname{int}(\alpha)\rho \\ u(\sigma) = \eta\sigma = \operatorname{int}(\beta)\sigma \end{cases} \\ & (\text{avec } \xi = \alpha\rho(\alpha)^{-1},\ \eta = \beta\sigma(\beta)^{-1}) \end{cases}$$

Dans $S\Gamma^0_{\rho,\sigma}$, on a un sous-groupe isomorphe à L_0, via

`[page 558]`

$$(40)\qquad \begin{array}{rcl} L_0 & \longrightarrow & S\Gamma^0_{\rho,\sigma} \subseteq B_{\rho,\sigma}\times Z_\rho \times Z_\sigma \\ l & \longmapsto & (l,1,1)\ , \end{array}$$

et l'action de L_0 par translation à gauche sur $S\Gamma^0_{\rho,\sigma}$ devient, par (39), l'action sur $S\mathcal{G}_{\rho,\sigma}$ donnée par

$$(41)\qquad (\alpha,\beta) \longmapsto (l\alpha, l\beta)\ .$$

Posant donc

$$(42)\qquad \Gamma^0_{\rho,\sigma} \overset{\text{def}}{=} S\Gamma^0_{\rho,\sigma}/\operatorname{Im} L_0 \simeq Z_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z_\sigma \qquad ({}^{17})\ ,$$

on trouve que (39) induit une bijection canonique

$$(43)\qquad \Gamma^0_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\sim} L_0\backslash S\mathcal{G}_{\rho,\sigma}\ .$$

Posant

$$(44)\qquad \begin{cases} SZ_\rho \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ker}(Z_\rho \longrightarrow \Gamma_{\rho,\sigma}) = \operatorname{Centr}_{\mathfrak{S}}(\rho) \\ SZ_\rho = \operatorname{Ker}(Z_\rho \longrightarrow \Gamma_{\rho,\sigma}) = \operatorname{Centr}_{\mathfrak{S}}(\sigma) \end{cases} \qquad ({}^{18})$$

`[plutôt` $SZ_\sigma \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ker}(Z_\sigma \longrightarrow \Gamma_{\rho,\sigma}) = \operatorname{Centr}_{\mathfrak{S}}(\sigma)$`]`, on a donc des suites exactes

$$(45)\qquad \begin{cases} 1 \longrightarrow SZ_\rho \longrightarrow Z_\rho \longrightarrow \Gamma_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow SZ_\sigma \longrightarrow Z_\sigma \longrightarrow \Gamma_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1\ , \end{cases}$$

[17] Noté $\mathcal{T}^0_{\rho,\sigma}$ dans §48, IX ff.

[18] Introduire aussi

$$\begin{aligned} S\Gamma_{\rho,\sigma} &= \operatorname{Ker}(\Gamma_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}) \\ SG_{\rho,\sigma} &= \operatorname{Ker}(G_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}) \\ &= \mathfrak{S}_{\rho,\sigma} = \mathfrak{S} \end{aligned}$$

et les expressions (37), (42) de $S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma}$, $\Gamma^0_{\rho,\sigma}$ donnent

$$(46)\qquad 1 \longrightarrow L_0 \times SZ_\rho \times SZ_\sigma \longrightarrow S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1\ ,$$

$$(47)\qquad 1 \longrightarrow SZ_\rho \times SZ_\sigma \longrightarrow \Gamma^0_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1\ .$$

NB Dans le cas $\mathfrak{S} = \mathrm{SL}(2, \hat{\mathbf{Z}})$, ρ et σ 'modulaires', on retrouve les $S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma}$ et $\Gamma^0_{\rho,\sigma}$ de §48 IX.

`[page 559]`

Soit maintenant

$$(49)\qquad \begin{aligned} [S\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} =]\ \ S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} &\overset{\text{def}}{=} \{(u,a,b,U) \mid \underbrace{\delta_B(u) = \delta_\rho(a) = \delta_\sigma(b) = \delta_G(U)}_{\text{relation dans } \Upsilon_{\rho,\sigma},\ \text{cf. (19)}}\} \qquad [^{19}]\ , \\ &\subseteq\ S\Gamma^0_{\rho,\sigma} \times G_{\rho,\sigma} \qquad (\subseteq B_{\rho,\sigma} \times Z_\rho \times Z_\sigma \times G_{\rho,\sigma}) \end{aligned}$$

$$(50)\qquad \begin{aligned} \mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} &\overset{\text{def}}{=} \{(a,b,U) \mid \underbrace{\delta_\rho(a) = \delta_\sigma(b) = \delta_G(U)}_{\text{relation dans } \Upsilon_{\rho,\sigma}}\} \\ &\subseteq\ T_\rho \times T_\sigma \times G_{\rho,\sigma} \end{aligned}$$

`[plutôt` $\ldots \subseteq Z_\rho \times Z_\sigma \times G_{\rho,\sigma}$`]`. On a donc un homomorphisme canonique

$$(51)\qquad \begin{array}{ccc} S\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \\ (u,a,b,U) & \longmapsto & (a,b,U)\ , \end{array}$$

dont le noyau est formé des $(u,1,1,1)$ avec $u \in B_{\rho,\sigma}$ tel que $\delta_B(u) = 1$, i.e. $u \in L_0$, d'où une suite exacte

$$(52)\qquad 1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow S\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \longrightarrow \mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1$$

et des homomorphismes canoniques

$$(53)\qquad \begin{array}{c} \mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \begin{cases} \xrightarrow{\theta_G} G_{\rho,\sigma} \\ \xrightarrow{\theta_\rho} Z_\rho \\ \xrightarrow{\theta_\sigma} Z_\sigma \end{cases} \\[2em] \left(\text{resp.}\quad (a,b,U) \begin{cases} \longmapsto U \\ \longmapsto a \\ \longmapsto b \end{cases}\right), \end{array}$$

redonnant les homomorphismes analogues sur $S\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma}$ par composition avec (41), et de plus on a un homomorphisme canonique

$$(54)\qquad \begin{array}{ccc} S\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} & \xrightarrow{\theta_B} & B_{\rho,\sigma} \\ (u,a,b,U) & \longmapsto & u\ . \end{array}$$

[19] `[(48) n'existe pas.]`

On a aussi l'interprétation

$$S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \;\simeq\; \mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} B_{\rho,\sigma} \;; \tag{55}$$

$S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma}$ s'exprime à l'aide de $\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma}$ et $B_{\rho,\sigma}$, et en tant qu'extension de $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ par L_0 est l'image inverse de l'extension $B_{\rho,\sigma}$ de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ par L_0. Et on a

$$\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \;\simeq\; \underbrace{Z_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z_\sigma}_{=\Gamma^0_{\rho,\sigma}} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} G_{\rho,\sigma} \;, \tag{56}$$

d'où on déduit (comme δ_ρ, δ_σ, δ_G sont épimorphes)

$$1 \longrightarrow \underbrace{SZ_\rho \times SZ_\sigma \times \mathfrak{S}}_{\overset{\text{def}}{=}\mathcal{M}^{0\,+}_{\rho,\sigma}} \longrightarrow \mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\delta_{\mathcal{M}}} \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 \;, \tag{57}$$

où on a (44)

$$\begin{cases} SZ_\rho &=& Z_\rho \cap \mathfrak{S} &=& \mathrm{Centr}_{\mathfrak{S}}(\rho) \\ SZ_\sigma &=& Z_\sigma \cap \mathfrak{S} &=& \mathrm{Centr}_{\mathfrak{S}}(\sigma) \;. \end{cases}$$

De même, on a

$$S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \;\simeq\; \underbrace{B_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z_\sigma}_{=S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma}} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} G_{\rho,\sigma} \qquad [20] \;, \tag{49}$$

donc on a une suite exacte canonique

$$1 \longrightarrow L_0 \times SZ_\rho \times SZ_\sigma \times \mathfrak{S} \longrightarrow S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Gamma_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 \;. \tag{50}$$

Considérons l'homomorphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S} & \xrightarrow{i_{\mathfrak{S}}} & \mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \\ U & \longmapsto & (1,1,U) \;, \end{array} \tag{51}$$

[page 560]

son image est le troisième facteur dans le noyau de (57), et on a une suite exacte canonique (déduite de (56) et (57))

$$1 \longrightarrow \underbrace{\mathfrak{S}}_{\substack{\text{parfois noté}\\ \mathfrak{S}_{\rho,\sigma}\ ?}} \longrightarrow \mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Gamma^0_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 \;, \tag{52}$$

et de même on a (via (49) ou (50))

$$1 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \longrightarrow S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 \;, \tag{53}$$

$$1 \longrightarrow SZ_\rho \times SZ_\sigma \longrightarrow \mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \longrightarrow G \longrightarrow 1 \;. \tag{53'}$$

[20] [Saut dans la numérotation.]

Considérons l'application

$$(54)\qquad \begin{array}{rcl} S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \mathfrak{S}\times\mathfrak{S}\times\mathfrak{S} \\ (u,a,b,U) & \longmapsto & (ua^{-1},ub^{-1},uU^{-1}) \;=\; (\alpha,\beta,f)\ , \end{array}$$

on voit par le corollaire p. 557 (cf. (37)) que cela induit une bijection

$$(55)\qquad S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \;\simeq\; (S\mathcal{G}_{\rho,\sigma})\times\mathfrak{S}\ .$$

On a ainsi pour un $x \in S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma}$, d'une part pour les quantités

$$(56)\qquad \underbrace{u}_{\in B_{\rho,\sigma}},\ \underbrace{a}_{\in Z_\sigma},\ \underbrace{b}_{\in Z_\rho},\ \underbrace{U}_{\in G_{\rho,\sigma}}$$

associés, d'autre part les éléments

$$(57)\qquad \alpha,\ \beta,\ f,\ \xi,\ \eta,\ \alpha_0,\ \beta_0,\ g,\ h \qquad \text{tous dans } \mathfrak{S}\ ,$$

où (α,β,f) `[sont]` définis en termes de (56) dans (54), et où on a posé

$$(58)\qquad \begin{cases} \xi \;=\; \alpha\rho(\alpha)^{-1},\ \eta \;=\; \beta\sigma(\beta)^{-1},\ \alpha_0 \;=\; f^{-1}\alpha,\ \beta_0 \;=\; f^{-1}\beta \\ g \;=\; \alpha_0\rho(\alpha_0)^{-1} \;=\; f^{-1}\xi\rho(f),\ h \;=\; \beta_0\sigma(\beta)^{-1} \;=\; f^{-1}\eta\sigma(f)\ . \end{cases}$$

On aura, en termes de α, β, f, les expressions suivantes de l'action de U sur $\mathfrak{S}$:

$$(59)\qquad \begin{cases} U(\rho) \;=\; \mathrm{int}(f^{-1}\alpha)(\rho) \;=\; \mathrm{int}(f^{-1})(\xi\rho) \\ U(\sigma) \;=\; \mathrm{int}(f^{-1}\beta)(\sigma) \;=\; \mathrm{int}(f^{-1})(\eta\sigma)\ . \end{cases}$$

Remords. Finalement, dans tous ces développements, on n'a pas vraiment utilisé la soi-disante 'hypothèse fondamentale' (20), sauf la partie a). En l'absence de b), il y a lieu d'introduire

$$(60)\quad \Sigma^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} \;=\; \{(\xi,\eta)\in\mathfrak{S}\times\mathfrak{S} \mid \exists\, u\in B_{\rho,\sigma},\ u(\rho)=\xi\rho,\ u(\sigma)=\eta\sigma\} \;\subseteq\; \Sigma_{\rho,\sigma} \;\subseteq\; \mathfrak{S}\times\mathfrak{S}\ ,$$

qui n'est donc autre que l'image de l'application (9) : couples *effectifs* (ξ,η) satisfaisant les conditions définissant $\Sigma_{\rho,\sigma}$ (cf. (8)). On notera

$$(61)\qquad S\mathcal{G}^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} \;=\; \text{Image inverse de } \Sigma^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} \text{ par } S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Sigma_{\rho,\sigma}\ (28)\ ,$$

et c'est sur $S\mathcal{G}^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma}$ qu'on aura une structure

`[page 561]`

de groupe isomorphe à $S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma}$, par l'isomorphisme (qui remplace (38))

$$(62)\qquad \begin{array}{rcl} S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma} & \xrightarrow{\sim} & S_0\mathcal{G}^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} \\ (u,a,b) & \longmapsto & (\underbrace{ua^{-1}}_{=\,\xi},\underbrace{ub^{-1}}_{=\,\eta})\ . \end{array}$$

Ceci posé, revenons à $\mathcal{M}^{\sim}_{\rho,\sigma}$, et la suite exacte

$$(63)\qquad 1 \longrightarrow \mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3} \longrightarrow \mathcal{M}^{\sim}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \underbrace{\Gamma^{\sim}_{0,3}}_{=\,\boldsymbol{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}} \longrightarrow 1\ .$$

Considérons le sous-groupe

$$\text{(64)}\qquad \begin{aligned} \Gamma'^{\sim}_{\mathbf{Q}} &= \operatorname{Ker}(\Gamma^{\sim}_{0,3} \xrightarrow{\varepsilon_3} \{\pm 1\}) \\ &= \{\gamma \in \Gamma^{\sim}_{0,3} \mid \mu(\gamma) \equiv 1 \ \ (3)\} \ , \end{aligned}$$

et soit

$$\text{(65)}\qquad \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3} \ = \ \text{Image inverse de } \Gamma'^{\sim}_{0,3} \text{ dans } \mathcal{M}^{\sim}_{0,3} \ .$$

Soit $\mathfrak{S}$ un groupe profini, et

$$\text{(66)}\qquad \psi \ : \ \mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3} \longrightarrow \mathfrak{S}$$

un homomorphisme continu surjectif – ce qui revient au même que de se donner deux éléments

$$\text{(67)}\qquad \rho_{\mathfrak{S}} \, , \sigma_{\mathfrak{S}} \ \in \ \mathfrak{S}$$

(les images de ρ, σ par ψ) satisfaisant

$$\text{(68)}\qquad \rho^3_{\mathfrak{S}} \ = \ \sigma^2_{\mathfrak{S}} \ = \ 1$$

`[et qui engendrent` $\mathfrak{S}$`]`.

Définition ([21]). On dira que ψ est *effectif* si pour tout $u \in \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}[0]$, posant $u(\rho) = \xi\rho$, $u(\sigma) = \eta\sigma$, le couple

$$(\xi_{\mathfrak{S}}, \eta_{\mathfrak{S}}) \ = \ (u(\xi), u(\eta)) \ \in \ \Sigma_{\rho,\sigma}$$

est effectif, i.e. dans $\Sigma^{\text{eff}}_{\rho,\sigma}$, i.e. $\exists \, u_{\mathfrak{S}}$ automorphisme de $\mathfrak{S}$ tel que

$$\text{(69)}\qquad u_{\mathfrak{S}}(\rho_{\mathfrak{S}}) \ = \ \xi_{\mathfrak{S}}\rho_{\mathfrak{S}} \ , \qquad u_{\mathfrak{S}}(\sigma_{\mathfrak{S}}) \ = \ \eta_{\mathfrak{S}}\sigma_{\mathfrak{S}} \ ,$$

ou, ce qui revient au même, qu'on a commutativité

$$\text{(70)}\qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3} & \xrightarrow{u} & \mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\psi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathfrak{S} & \xrightarrow{u_{\mathfrak{S}}} & \mathfrak{S} \ . \end{array}$$

Donc dire que c'est le cas pour tout $u \in \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}[0]$ signifie que ces u transforment $\operatorname{Ker}\psi$ en lui-même – ou aussi, que $\mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}$ $(= \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}[0] \cdot \mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3})$ tout entier stabilise $\operatorname{Ker}\psi$. Cette condition est donc automatiquement remplie quand $\mathfrak{S}$, $\rho_{\mathfrak{S}}$, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ satisfont la condition b) de (20).

[21] L'introduire par conditions équivalentes :

a) $\mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}[0] \longrightarrow \Sigma^{\text{eff}}_{\rho,\sigma}$.

b) $\forall \, u \in \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}$, $\exists \, u_{\mathfrak{S}} \in \operatorname{Aut}\mathfrak{S}$ tel que $u_{\mathfrak{S}} \circ \psi = \psi \circ u$.

b′) Itou avec $u \in \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}[0]$.

c) $\exists \, \psi_{\mathcal{M}}$ qui prolonge ψ.

c′) $\exists \, \psi_{\mathfrak{S}}$ qui prolonge ψ.

On dira alors que ψ est *effective.* C'est automatique si (20) b) `[est]` satisfait.

On a fait ce qu'il fallait pour avoir le

`[page 562]`

Théorème. *Soit* $\psi = \psi_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} \longrightarrow \mathfrak{S}$ *un homomorphisme surjectif effectif (cf. ci-dessus). Alors il existe un homomorphisme unique*

(71) $$\psi_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3} \longrightarrow \mathcal{M}^{0}_{\rho_{\mathfrak{S}},\sigma_{\mathfrak{S}}}$$

ayant la propriété suivante : Si $u \in \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}$ *est de la forme* $u_{\alpha,\beta,f}$ $(\alpha,\beta,f \in \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge}$, *satisfaisant l'équation des lacets* $\alpha\rho(\alpha)^{-1} = \beta\sigma(\beta)^{-1}l_1^{\nu})$, *alors* $\psi_{\mathcal{M}}(u)$ *est l'élément de* $\mathcal{M}^0_{\psi}$ *défini par les invariants* $\psi(\alpha)$, $\psi(\beta)$, $\psi(f)$ (22).

Corollaire. *On a alors des homorphismes des suites exactes*

(72) $$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} & \longrightarrow & \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3} & \longrightarrow & \mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathfrak{S}}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathcal{M}}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathcal{T}}} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathcal{M}^0_{\psi} & \longrightarrow & \Gamma^0_{\psi} & \longrightarrow & 1\,.
\end{array}$$

L'homomorphisme $\psi_{\mathcal{M}}$ s'explicite à l'aide des trois homomorphismes

(73) $$\left\{\begin{array}{lcccc}
\psi_{T_\rho} & : & \mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & Z_\rho \\
\psi_{T_\sigma} & : & \mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & Z_\sigma
\end{array}\right.$$

(74) $$\psi_G : \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3} \longrightarrow G_{\rho,\sigma} \qquad (^{23})$$

Pour $x \in \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}$, $\dot{x}$ son image dans $\mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}}$, et

(75) $$a = \psi_{\Gamma_\rho}(\dot{x})\,, \qquad b = \psi_{\Gamma_\sigma}(\dot{x})\,, \qquad U = \psi_G(x)\,,$$

on a

(76) $$\delta_\rho(a) = \delta_\sigma(b) = \delta_G(U) \qquad \text{dans } \Upsilon_{\rho,\sigma}\,,$$

i.e. les trois homomorphismes composés

(77) $$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\psi_{\Gamma_\rho}"] & \Gamma_\rho \arrow[dr, "\delta_\rho"] & \\
\mathcal{M}'^{\sim}_{0,3} \arrow[ur, "\text{can.}"] \arrow[r, "\text{can.}"] \arrow[dr, "\psi_G"'] & \mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\psi_{\Gamma_\sigma}"] & \Gamma_\sigma \arrow[r, "\delta_\sigma"] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \\
 & G_{\rho,\sigma} \arrow[urr, "\delta_G"] & &
\end{tikzcd}$$

---

[22] En fait, on a bien sûr en premier lieu un homomorphisme

$$S_0\mathcal{M}'^{\sim}_{0,3} \longrightarrow S_0\mathcal{M}^0_{\psi}\,.$$

[23] NB on écrit pour simplifier ρ, σ au lieu de $\rho_{\mathfrak{S}}$, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ en indices.

sont égaux. De plus, on aura d'après (76)

(78) $$\psi_G|\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} \;=\; \psi_{\mathfrak{S}}\ ,$$

et enfin ceci :

(79) Si $x \in \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}$, $U = \psi_G(x)$, on a commutativité dans

(80)
$$\begin{CD}
\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} @>{\psi}>> \mathfrak{S} \\
@V{\mathrm{int}(x)|\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge}}VV @VV{\mathrm{int}(U)|\mathfrak{S}}V \\
\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} @>{\psi}>> \mathfrak{S}\ .
\end{CD}$$

[page 563]

On peut reprendre tout ceci comme un énoncé de *fonctorialité* des constructions faites, par rapport à un homomorphisme surjectif

(81) $$\mathfrak{S} \xrightarrow{\varphi = \varphi_{\mathfrak{S}}} \mathfrak{S}'\ ,$$

transformant le couple (ρ, σ) de générateurs topologiques de $\mathfrak{S}$ en un couple (ρ', σ') ([24]). Il y a alors un unique homomorphisme

(82) $$S_0\mathcal{M}^0_{\mathfrak{S}} \xrightarrow{\varphi_{S\mathcal{M}^0}} S_0\mathcal{M}^0_{\mathfrak{S}'}$$

[$\varphi_{S_0\mathcal{M}^0} = \varphi_{S_0\mathcal{M}_0} = \varphi_{S\mathcal{M}^0} = \varphi_{S\mathcal{M}}$ `dans ce qui suit`], satisfaisant les conditions suivantes :

a) $\varphi_{S\mathcal{M}}$ passe au quotient en des homomorphismes

(83) $$\begin{cases} \varphi_B \;:\; B_{\rho,\sigma} \longrightarrow Z_{\rho,\sigma} & \texttt{[plutôt } B_{\rho,\sigma} \longrightarrow B_{\rho',\sigma'}\texttt{]} \\ \varphi_\rho \;:\; Z_\rho \longrightarrow Z_{\rho'} \\ \varphi_\sigma \;:\; Z_\sigma \longrightarrow Z_{\sigma'} \\ \varphi_G \;:\; G_{\rho,\sigma} \longrightarrow G_{\rho',\sigma'} \end{cases}$$ ([25]) .

b)

(84) $\Big\{$ Les homomorphismes φ_B, φ_ρ, φ_σ sont induits par φ_G (ce qui montre que la connaisance de $\varphi_{S\mathcal{M}}$ se ramène à celle de φ_G) ;

c) On a commutativité dans

(85)
$$\begin{CD}
\mathfrak{S} @>>> G_{\rho,\sigma} \\
@V{\varphi = \varphi_{\mathfrak{S}}}VV @VV{\varphi_G}V \\
\mathfrak{S}' @>>> G_{\rho',\sigma'}
\end{CD}$$

(ce qui montre, puisque $G_{\rho,\sigma} = B_{\rho,\sigma} \cdot \mathfrak{S}$, que φ_G est connu quand on connaît φ_B) ;

[24] Il aurait mieux valu prendre $\mathfrak{S}' \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{S}$ pour pouvoir spécialiser en $\mathfrak{S}'$.

[25] Ceci montre que $\varphi_{S\mathcal{M}}$ est déterminé quand on connaît les quatre homomorphismes φ_B, φ_ρ, φ_σ, φ_G.

d) Pour $u \in B_{\rho,\sigma}$, posant $u' = \varphi_B(u)$, on a commutativité dans

(86)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varphi_{\mathfrak{S}}"'] & \mathfrak{S} \arrow[d, "\varphi_{\mathfrak{S}}"] \\ \mathfrak{S}' \arrow[r, "u'"] & \mathfrak{S}' \end{tikzcd}$$

(ce qui détermine φ_B en termes de $\varphi = \varphi_{\mathfrak{S}}$, donc cela détermine $\varphi_{\mathfrak{S}\mathcal{M}}$, et par passage au quotient, aussi

(87)
$$\varphi_{\mathcal{M}} \,:\, \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \mathcal{M}_{\rho',\sigma'} \quad .)$$

Une autre façon, plus directe, de décrire $\varphi_{S_0\mathcal{M}^0}$ ou $\varphi_{\mathcal{M}}$, en termes des 'paramètres' (α, β, f) au lieu de (u, a, b, U), est de dire que $\psi_{S_0\mathcal{M}^0}$ `[plutôt` $\varphi_{S_0\mathcal{M}^0}$`]` transforme un $u_{\alpha,\beta,f}$ en $u_{\alpha',\beta',f'}$, où α', β', f' sont les images de α, β, f par φ :

(88)
$$\varphi_{S_0\mathcal{M}_0}(\underbrace{u_{\alpha,\beta,f}}_{\in S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma}}) = u_{\alpha',\beta',f'} \ , \qquad \begin{cases} \alpha' &= \varphi(\alpha) \\ \beta' &= \varphi(\beta) \\ f' &= \varphi(f) \end{cases} .$$

On retrouve ainsi, sous une forme un peu plus précise, le théorème précédent en l'appliquant au cas où $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3}$ (le 'cas universel' ([26])), $\mathfrak{S}'$ quelconque – il vaut mieux dans la notation (81) interchanger le rôle de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$. Il est bon d'expliciter les invariants essentiels dans le cas 'universel' :

(90)
$$\begin{aligned} \mathfrak{S}' &= \mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3} \ , & B'_{\rho',\sigma'} &= \mathcal{M}'^{!\sim}_{0,3}[0] \ , & \Upsilon'_{\rho',\sigma'} &= \mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}} \ , \\ G'_{\rho',\sigma'} &= \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3} \ , & Z'_\rho &= \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}(-\bar{\jmath}) \ , & Z'_\sigma &= \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3}(1/2) \ , \\ \Gamma'_{\rho',\sigma'} &= \Gamma'_{\mathbf{Q}} \ , & & [^{27}] \ , \end{aligned}$$

`[page 564]`

(91)
$$\Gamma'_{\rho',\sigma'} \xrightarrow{\sim} \Upsilon'_{\rho',\sigma'} \ , \qquad Z'_{\rho'} \xrightarrow{\sim} \Upsilon'_{\rho',\sigma'} \ , \qquad Z'_{\sigma'} \xrightarrow{\sim} \Upsilon'_{\rho',\sigma'} \ ,$$

donc $SZ'_{\rho'} = SZ'_{\sigma'} = S\Gamma'_{\rho',\sigma'} = 1$, et

(92)
$$S_0\mathcal{M}'_{\rho',\sigma'} \simeq S_0G'_{\rho',\sigma'} \simeq S_0\mathcal{M}'^{\sim}_{0,3} \ , \qquad \mathcal{M}'_{\rho',\sigma'} \xrightarrow{\sim} G_{\rho',\sigma'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'^{\sim}_{0,3} \ .$$

Remarque. En écrivant les relations (80) `[(90)?]`, il devenait évident que les notations utilisées dans toute cette section II (depuis page 553) étaient inadéquates ([28]), et qu'il convient de les modifier de la façon suivante :

(93)
$$\begin{gathered} \Sigma_{\rho,\sigma} \ , \ B_{\rho,\sigma} \ , \ S_0G_{\rho,\sigma} \ , \ G_{\rho,\sigma} \ , \ \Upsilon_{\rho,\sigma} \ , \ Z_\rho \ , \ Z_\sigma \ , \ \mathcal{G}_{\rho,\sigma} \ , \ S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} \ , \\ Z_\rho \ , \ Z_\sigma \ , \ S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma} \ , \ \Gamma^0_{\rho,\sigma} \ , \ SZ_\rho \ , \ SZ_\sigma \ , \ S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \ , \ \mathcal{M}^0_{\rho,\sigma} \ . \end{gathered}$$

[26] Tout au moins 'universel' par rapport à l'hypothèse supplémentaire $\rho^3 = 1$, $\sigma^2 = 1$ dans $\mathfrak{S}$.

[27] `[(89) n'existe pas.]`

[28] Car je m'y étais inspiré du cas $\mathfrak{S} = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, couple modulaire ρ, σ (qui ne reçoit pas même $\mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3}$, à cause de $\{\pm 1\}$!) et non du cas universel, qui aurait dû me servir de fil conducteur pour mes notations.

On met partout un accent $'$ pour en faire $\Sigma'_{\rho,\sigma}$, $B'_{\rho,\sigma}$ etc., et on enlève l'exposant ^{0} de $S_0\Gamma^0_{\rho,\sigma}$, $\Gamma^0_{\rho,\sigma}$, $S_0\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma}$, $\mathcal{M}^0_{\rho,\sigma}$ (qui se trouve donc remplacé par un $'$).

Autres cas particuliers importants explicités en :

2^o) $\mathfrak{S} = \mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}})/\pm 1$, (ρ,σ) couple modulaire.

$$(94)\quad \left\{\begin{array}{rcll} B'_{\rho,\sigma} & = & \left\{\left(\begin{smallmatrix}\mu & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \mu\in\hat{\mathbf{Z}}^*,\ \mu\equiv 1\ (3),\ \lambda\in\hat{\mathbf{Z}}\right\} & \\ L_0 & = & \left\{\left(\begin{smallmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \lambda\in\hat{\mathbf{Z}}\right\} & \\ G'_{\rho,\sigma} & = & \mathrm{GL}'(2,\hat{\mathbf{Z}})/\pm 1\ , \quad \text{où} \quad \mathrm{GL}'(2,\hat{\mathbf{Z}}) \overset{\text{def}}{=} \{u\in\mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}}) \mid \det\equiv 1\ (3)\} & \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad \simeq T_\rho(\hat{\mathbf{Z}})/\boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{Z}) \qquad ({}^{29}) & \\ Z'_\rho & = & \{c\rho+d \mid c^2+cd+d^2\in\hat{\mathbf{Z}}^*\}/\pm 1 & \\ Z'_\sigma & = & \mathcal{N}'_\sigma(\hat{\mathbf{Z}})/\boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{Z}) & \text{avec notations de §48} \\ S_0\mathcal{M}'_{\rho,\sigma} & \simeq & S\mathcal{M}'_{\rho,\sigma}(\hat{\mathbf{Z}})/\Sigma & \text{idem} \\ \mathcal{M}'_{\rho,\sigma} & \simeq & \mathcal{M}'_{\rho,\sigma}(\hat{\mathbf{Z}})/\Sigma & \text{idem} \\ \texttt{[-]} & \simeq & \mathcal{T}'_{\rho,\sigma}(\hat{\mathbf{Z}})/\Sigma_0 & \text{idem} \end{array}\right.$$

3^0) Prenons $\mathfrak{S} = \mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}})$, avec couple modulaire [(ρ,σ)].

$$(95)\quad \left\{\begin{array}{rcll} B'_{\rho,\sigma} & = & \left\{\left(\begin{smallmatrix}\mu & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \mu\in\hat{\mathbf{Z}}^*,\ \mu\equiv 1\ (3),\ \lambda\in\hat{\mathbf{Z}}\right\} & \\ G'_{\rho,\sigma} & = & \mathrm{GL}'(2,\hat{\mathbf{Z}})\ , \quad \text{où} \quad \mathrm{GL}'(2,\hat{\mathbf{Z}}) \overset{\text{def}}{=} \{u\in\mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}}) \mid \det\equiv 1\ (3)\} & \\ Z'_\rho & = & \{c\rho+d \mid c,d\in\hat{\mathbf{Z}},\ c^2+cd+d^2\in\hat{\mathbf{Z}}^*\} & \\ Z'_\sigma & = & T'_\sigma\cdot\{1,\tau_\infty\}, \ \text{où} \ \left\{\begin{array}{lcl} T'_\sigma & \overset{\text{def}}{=} & \{t\sigma+u \mid t,u\in\hat{\mathbf{Z}},\ t^2+u^2\in\hat{\mathbf{Z}}^*\} \\ \tau_\infty & = & \left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\end{array}\right. & \\ S_0\mathcal{M}'_{\rho,\sigma} & \simeq & S\mathcal{M}'_{\rho,\sigma}(\hat{\mathbf{Z}})/\Sigma_0 & \text{avec notations de §48} \\ \mathcal{M}'_{\rho,\sigma} & \simeq & \mathcal{M}'_{\rho,\sigma}(\hat{\mathbf{Z}})/\Sigma_0 & \text{idem} \\ S_0\Gamma'_{\rho,\sigma} & \simeq & S_0\mathcal{T}'_{\rho,\sigma}(\hat{\mathbf{Z}})/\Sigma_0 & \text{idem} \\ \Gamma_{\rho,\sigma} & \simeq & \mathcal{T}'_{\rho,\sigma}(\hat{\mathbf{Z}})/\Sigma_0 & \text{idem} \end{array}\right.$$

[page 565]

III) Considérons l'extension $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})^\wedge$ de $\mathfrak{S}^\wedge_{0,3}$ par $\{\pm 1\}$:

[29] C'est $G(\mathbf{Z})/\boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{Z})$ avec notations du §48.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \{\pm 1\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \{\pm 1\} \arrow[r] & \mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{S}_{0,3}^{\wedge} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & \{\pm 1\} \arrow[r] \arrow[d] & \{\pm 1\} \arrow[d] & \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

On s'intéresse au groupe $\mathcal{N}_{1,1}^{\sim}$, défini comme extension de $\mathcal{M}_{0,3}^{\sim}$ par $\{\pm 1\}$, image inverse de l'extension $\mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}})$ de $\mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}})/\pm 1$ par $\{\pm 1\}$, via l'homomorphisme canonique

$$
\mathcal{M}_{0,3}^{\sim} \longrightarrow \mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}})' = \mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}})/\pm 1 \tag{2}
$$

(cf. §45 . . .), de sorte qu'on trouve un homomorphisme de suites exactes

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \{\pm 1\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{N}_{1,1}^{\sim} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_{0,3}^{\sim} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \{\pm 1\} \arrow[r] & \mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}}) \arrow[r] & \mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}})' \arrow[r] & 1\,.
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

On trouve un isomorphisme canonique entre l'image inverse $\mathcal{T}_{1,1}^{\wedge}$ de $\mathfrak{S}_{0,3}^{\wedge} \subseteq \mathcal{M}_{0,3}^{\sim}$ dans $\mathcal{N}_{1,1}$, avec $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge}$ ([30]), induisant un homomorphisme

$$
\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge} \longrightarrow \mathcal{N}_{1,1}^{\sim}\,, \tag{4}
$$

dont la restriction à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge}$ s'insère dans une suite exacte canonique

$$
1 \longrightarrow \underbrace{\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge}}_{=\mathcal{T}_{1,1}^{+\wedge}} \hookrightarrow \mathcal{N}_{1,1}^{\sim} \longrightarrow \underbrace{\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim}}_{=\Gamma_{0,3}^{\sim}} \longrightarrow 1\,, \tag{5}
$$

qui à son tour s'insère dans le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge} \arrow[r] \arrow[d, "\text{épi}"] & \mathcal{N}_{1,1}^{\sim} \arrow[r] \arrow[d, "\text{épi}"] & \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim} \arrow[r] \arrow[d, "\chi"', "\text{épi}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}}) \arrow[r] & \mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}}) \arrow[r] & \hat{\mathbf{Z}}^{*} \arrow[r] & 1\,.
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

[30]**NB** $\mathcal{T}_{1,1} \simeq \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})$.

On peut écrire

$$(7) \qquad \mathcal{M}^{\sim}_{0,3} \simeq \underbrace{\overbrace{\mathcal{M}^{\sim}_{0,3}(0)}^{\simeq \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}} \cdot \overbrace{\mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3}}^{\simeq \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge\prime} \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge}/\pm 1}}_{\text{(semi-direct)}}$$

en termes de cette décomposition, et compte tenu qu'on a un homomorphisme canonique

$$(8) \qquad \mathcal{M}^{\sim}_{0,3}(0) \longrightarrow \mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}})$$

qui remonte la restriction de (2) à $\mathcal{M}^{\sim}_{0,3}(0)$, on trouve un isomorphisme canonique

`[page 566]`

$$(9) \qquad \mathcal{N}^{\sim}_{1,1} \simeq \underbrace{\mathcal{N}^{\sim}_{1,1}(0)}_{\simeq \mathcal{M}^{\sim}_{0,3}(0) \simeq \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}} \cdot \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge} .$$

Ainsi on a une opération de $\mathcal{N}^{\sim}_{1,1}(0) \simeq \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge}$ que je voudrais expliciter, en utilisant le diagramme cartésien

$$(10) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & \mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\substack{\text{induit}\\ \text{par}(2)}"] & \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge}/\pm 1 \arrow[dl, "\text{can.}"] \\ \mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}}) \arrow[r] & \mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}})/\pm 1 . & \end{tikzcd}$$

Un élément u de $\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ correspond à un couple

$$(11) \qquad (\alpha,\beta) \in \underbrace{\hat{\pi}'_{0,3}}_{\{1,\tau_\infty\}\cdot\hat{\pi}_{0,3}} \times \hat{\pi}_{0,3}$$

satisfaisant l'équation des lacets

$$(12) \qquad \alpha\rho(\alpha)^{-1} = \beta\rho(\beta)^{-1} l_1^{\nu} \qquad (\nu \in \hat{\mathbf{Z}}) ,$$

qui opère sur $\mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3} \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge\prime}$ par

$$(13) \qquad \begin{cases} u(\rho) = \mathrm{int}(\alpha)\rho = \xi\rho , & \xi = \alpha\rho(\alpha)^{-1} , \\ u(\sigma) = \mathrm{int}(\beta)\sigma = \eta\sigma , & \eta = \beta\sigma(\beta)^{-1} , \end{cases}$$

ce qui est compatible avec l'opération (notée $\underline{u}$) sur $\mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}})$ induit par $\mathrm{int}(\underline{u})$, où $\underline{u} \in \mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}})$ est l'élément défini comme l'image de u par (8), de façon précise :

$$(14) \qquad \tilde{u} = i_{T_0}(\mu) , \qquad \text{où } \mu = \chi(u) \text{ est le multiplicateur, et}$$

$$(15) \qquad \begin{cases} i_{T_0} : \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow \mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}}) \\ \qquad\quad \mu \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) . \end{cases}$$

On aura, de façon précise,

$$
(16)\qquad \begin{cases} \underline{u}(\underline{\rho}) \;=\; \underline{\xi}(\rho)\ , \quad \text{où} \quad \underline{\xi} \;=\; \underline{\alpha}\rho(\alpha)^{-1} \\ \underline{u}(\underline{\sigma}) \;=\; \underline{\eta}(\rho)\ , \quad \text{où} \quad \underline{\eta} \;=\; \varepsilon\underline{\beta}\rho(\beta)^{-1}\ , \end{cases} \qquad ({}^{31})
$$

avec, pour mémoire,

$$
(17)\qquad \varepsilon \;=\; \varepsilon_2(\mu) \in \{\pm 1\} \qquad \begin{cases} \varepsilon \;=\; +1 \;\; \text{si et seulement si} \;\; \mu \;\equiv\; 1 \;\; (4) \\ \varepsilon \;=\; -1 \;\; \text{si et seulement si} \;\; \mu \;\equiv\; -1 \;\; (4)\ . \end{cases}
$$

Bien entendu, $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^\wedge$ est engendré aussi topologiquement par ρ et σ, et on identifie ± 1 au sous-groupe central de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$, donc de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^\wedge$, en écrivant aussi $-g$ pour le produit de $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^\wedge$ par -1. On aura donc dans $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^\wedge$

$$
(18)\qquad \begin{cases} u(\rho) \;=\; \mathrm{int}(\tilde\alpha)(\rho) \;=\; \xi\rho \\ \text{et } u(\sigma) \;=\; \varepsilon\,\mathrm{int}(\tilde\beta)(\sigma) \;=\; \eta\sigma \end{cases}
$$

avec

$$
(19)\qquad \begin{cases} \xi \;=\; \tilde\alpha\rho(\tilde\alpha)^{-1}\ , \qquad \eta \;=\; \varepsilon\tilde\beta\sigma(\tilde\beta)^{-1} \\ \varepsilon \;=\; \varepsilon_2(\mu) \;\in\; \{\pm 1\} \;\subseteq\; \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^\wedge\ , \end{cases}
$$

`[page 567]`

où maintenant $\tilde\alpha$ et $\tilde\beta$ désignent des relèvements arbitraires de α et β à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^\wedge$ – ils ne sont déterminés qu'au signe près, mais $\mathrm{int}(\tilde\alpha)$, $\mathrm{int}(\tilde\beta)$, ξ et η sont déterminés sans ambiguité par u. Notons aussi

$$
(20)\qquad u(\varepsilon_0) \;=\; \varepsilon_0^\mu\ .
$$

Si maintenant on a un homomorphisme surjectif

$$
(20)\qquad \mathcal{N}_{1,1}^{\sim} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{G} \qquad [{}^{32}]
$$

induisant un homomorphisme

$$
(21)\qquad \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^\wedge \xrightarrow{\text{épi}} \underbrace{\mathfrak{S}}_{=\,\mathrm{Im}\,\Psi} \subseteq \mathcal{G}\ ,
$$

les images de ρ, σ dans $\mathfrak{S}$ (notées par les mêmes lettres) satisferont

$$
(22)\qquad \begin{aligned} &\rho^6 \;=\; \sigma^4 \;=\; 1\ , \qquad \rho^3 = \sigma^2\ , \\ &\text{et par suite } [\rho^3,\sigma] = [\sigma^2,\rho] = 1, \text{ i.e. } \rho^3,\ \sigma^2 \text{ sont } \textit{centraux}\ ({}^{33})\ , \end{aligned}
$$

[31] Les soulignés désignent des éléments dans $\mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}})$ – $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ ne sont déterminés qu'au signe près, mais $\underline{\xi}$, $\underline{\eta}$ sans ambiguité.

[32] `[Deux fois (20).]`

et on peut, pour $u \in \mathcal{N}^{\sim}_{1,1}(0)$, correspondant à des éléments $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})^\wedge$ (déterminés modulo signe), d'où ξ, η, essayer de trouver un automorphisme $u_{\mathfrak{G}}$ de $\mathfrak{G}$, satisfaisant les relations idoines

$$(23) \qquad u_{\mathfrak{G}}(\rho_{\mathfrak{G}}) = \xi_{\mathfrak{G}}\rho_{\mathfrak{G}}\,, \qquad u_{\mathfrak{G}}(\sigma_{\mathfrak{G}}) = \eta_{\mathfrak{G}}\sigma_{\mathfrak{G}}\,,$$

et faire joujou avec $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$. Mais on est obligé, comme on n'a pas nécessairement $\tilde{\alpha} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})^\wedge$, seulement $\tilde{\alpha} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})^\wedge$, de faire intervenir l'élément τ_∞ de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})^\wedge$, et l'action de son image τ dans $\mathcal{G}$ sur $\mathfrak{G}$. On aura, en posant maintenant

$$(24) \qquad \begin{aligned} \varepsilon_{0\,\mathfrak{G}} &= \sigma_{\mathfrak{G}}\rho_{\mathfrak{G}}\,, & \varepsilon_{1\,\mathfrak{G}} &= \rho_{\mathfrak{G}}\sigma_{\mathfrak{G}} &= \sigma_{\mathfrak{G}}(\varepsilon_{0\,\mathfrak{G}}) = \rho_{\mathfrak{G}}(\varepsilon_{0\,\mathfrak{G}}) \\ &= -\sigma_{\mathfrak{G}}^{-1}\rho_{\mathfrak{G}} & &= -\rho_{\mathfrak{G}}\sigma_{\mathfrak{G}}^{-1} & \end{aligned} \qquad ([34])\,,$$

des relations

$$(25) \qquad \tau(\sigma) = \sigma^{-1}\,, \qquad \tau(\rho) = \sigma(\rho)^{-1}\,, \qquad ([35])$$

qui impliquent, via (24) et (22),

$$(26) \qquad \tau(\varepsilon_0) = \varepsilon_0^{-1}\,, \qquad \tau(\varepsilon_1) = \varepsilon_1^{-1}\,,$$

et on introduit le groupe

$$(27) \qquad \mathfrak{G} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\{1, \tau\} \cdot \mathfrak{G}}_{\text{semi-direct}}\,,$$

où $\{1, \tau\}$ opère sur $\mathfrak{G}$ par les formules (25). Ceci dit, on est en mesure de paraphraser des constructions déjà faites par ailleurs.

`[page 568]`

IV)

1°) Soit donc $\mathfrak{G}$ un groupe profini, muni de générateurs $\rho, \sigma \in \mathfrak{G}$ satisfaisant les relations

$$(1) \qquad \rho^6 = \sigma^4 = 1\,, \qquad \rho^3 = \sigma^2 \ (\overset{\text{def}}{=} `-1')([36])$$

— un cas particulièrement intéressant étant celui où $\rho^3 = \sigma^2 = 1$, auquel néanmoins je ne voudrais me limiter. Soit τ un automorphisme de $\mathfrak{G}$ satisfaisant

$$(2) \qquad \tau(\sigma) = \sigma^{-1} = -\sigma\,, \qquad \tau(\rho) = \sigma(\rho^{-1}) \qquad ([37])$$

(ce qui signifie que τ_∞ 'passe au quotient' en automorphisme τ de $\mathfrak{G}$), ce qui implique

$$(3) \qquad \tau^2 = 1$$

$$(4) \qquad \tau(\varepsilon_0) = \varepsilon_0^{-1}\,, \qquad \tau(\varepsilon_1) = \varepsilon_1^{-1}\,,$$

[33] Donc dans $\mathfrak{G}$ il y a un élément central canonique involutif, noté -1 ...

[34] Ce qui n'est pas la convention habituelle jusqu'à présent ...

[35] Je laisse tomber les indices $\mathfrak{G}$.

[36] Ceci signifie simplement qu'on se donne un homomorphisme surjectif $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})^\wedge \longrightarrow \mathfrak{G}$

[37] Introduire tout de suite l'élément équivalent $\tau' = \sigma^{-1}\tau$ satisfaisant $\tau'(\rho) = \rho^{-1}$, $\tau'(\sigma) = \sigma^{-1}$ ($\tau'(\varepsilon_0) = \varepsilon_1^{-1}$, $\tau'(\varepsilon_1) = \varepsilon_0^{-1}$).

où

$$(5) \qquad \varepsilon_0 \;=\; \sigma\rho \;=\; -\sigma^{-1}\rho\,, \qquad \varepsilon_1 \;=\; \rho\sigma \;=\; \sigma(\varepsilon_0) \;=\; \sigma^{-1}(\varepsilon_0) \;=\; \rho(\varepsilon_0) \qquad ({}^{38})\,.$$

Posons

$$(5) \qquad \mathfrak{S}' \;=\; \{1,\tau\}\cdot\mathfrak{S} \qquad [{}^{39}]\,,$$

donc on a

$$(6) \qquad 1 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}' \longrightarrow \{1,\tau\} \longrightarrow 1\,.$$

Soit

$$(7) \qquad B_{\rho,\sigma} \;=\; \left\{ (u,\mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} u(\varepsilon_0) = \varepsilon_0^{\mu} \\ u(\sigma) \text{ conjugué dans } \mathfrak{S} \text{ à } \sigma^{\mu} \\ u(\rho) \text{ conjugué dans } \mathfrak{S} \text{ à } \rho^{\mu} \end{array} \right\} \;\subseteq\; \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}) \times \hat{\mathbf{Z}}^*\,,$$

qui est évidemment un *sous-groupe.* La troisième condition signifie d'ailleurs, puisque $\rho^6 = 1$, i.e. ρ^{μ} ne dépend que de l'image de μ dans $(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})^* \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^* \simeq (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^* \simeq \{\pm 1\}$, donc

$$(8) \qquad \rho^{\mu} \;=\; \rho^{\varepsilon_3(\mu)}\,,$$

que pour $\varepsilon_3(\mu) = 1$, $u(\mu)$ est conjugué à ρ dans $\mathfrak{S}$, et pour $\varepsilon_3(\mu) = -1$, il est conjugué à ρ^{-1} dans $\mathfrak{S}$, ou encore à ρ par un élément de $\mathfrak{S}'^{-}$, i.e. un élément de la forme $\alpha_1\tau_\infty$, avec $\alpha_1 \in \mathfrak{S}$ (puisque $\tau_\infty(\rho) = \sigma(\rho^{-1})$ justement ...). On voit de même qu'on a

$$(9) \qquad \sigma^{\mu} \;=\; \sigma^{\varepsilon_2(\mu)} \;=\; \varepsilon_2(\mu)\sigma \;=\; \begin{cases} = \sigma & \text{si } \mu \equiv 1 \ (4) \\ = \sigma^{-1} \;=\; -\sigma & \text{si } \mu \equiv -1 \ (4) \end{cases}\,.$$

Ainsi :

Proposition. *Pour que* $(u,\mu) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}) \times \hat{\mathbf{Z}}$ *soit dans* $B_{\rho,\sigma}$*, il faut et il suffit qu'il existe* $\alpha \in \mathfrak{S}'$, $\beta \in \mathfrak{S}$ *tels qu'on ait*

`[page 569]`

$$(10) \qquad u(\rho) \;=\; \mathrm{int}(\alpha)(\rho)\,, \qquad u(\sigma) \;=\; \underbrace{\varepsilon_2(\mu)}_{=\varepsilon}\,\mathrm{int}(\beta)(\sigma)\,,$$

et enfin

$$(11) \qquad u(\varepsilon_0) \;=\; \varepsilon_0^{\mu}\,,$$

où de plus on a

$$(12) \qquad \alpha \;\in\; \mathfrak{S} \qquad \textit{si et seulement si} \qquad \mu \;\equiv\; 1 \ \ (3) \qquad ({}^{40})\,.$$

[38] On fera attention au signe $-$, alors que précédemment on supposait souvent $\varepsilon_0 = \sigma^{-1}\rho$ ...

[39] `[Deux fois (5).]`

On notera que (u,μ) est uniquement déterminé par μ et la connaissance de α et de β, et même seulement par μ et

(13) $$\xi \;=\; \alpha\rho(\alpha)^{-1}\;, \qquad \eta \;=\; \varepsilon_2(\mu)\beta\sigma(\beta)^{-1}\;,$$

puisqu'on aura alors u par

(14) $$u(\rho) \;=\; \xi\rho\;, \qquad u(\sigma) \;=\; \eta\sigma\;.$$

D'ailleurs, dans le cas où

(15) $$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{Z}} & \longrightarrow & \mathfrak{S} \\ n & \longmapsto & \varepsilon_0^n \end{array}$$

est injectif, μ est déterminé en fonction de u comme multiplicateur de l'action de u sur $L_0^{\mathfrak{S}} \subseteq \mathfrak{S}$, image de (15), donc (u,μ) est déterminé par u, donc par $(\alpha,\beta,\varepsilon = \varepsilon_2(\mu))$. D'ailleurs, si $\mathfrak{S}$ est assez gros pour s'envoyer dans $\mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}})'$ (de façon à envoyer (ρ,τ) sur les éléments habituels), on a vu que α à lui tout seul détermine déjà μ, donc ε, donc l'élément de $B_{\rho,\sigma}$ est déterminé à l'aide de α, β seulement.

Mais quelles conditions doivent satisfaire (α,β,μ) pour déterminer un élément de $B_{\rho,\sigma}$? Tout d'abord, il faut qu'il existe bien un automorphisme u (nécessairement unique) satisfaisant (14) – c'est une condition sur ξ, η seuls. Il faut ensuite exprimer (11). Introduisant

(*) $$\varepsilon_0' \;=\; \sigma^{-1}\rho \;=\; -\varepsilon_0\;,$$

d'où

$$\begin{aligned} {\varepsilon_0'}^{\mu} \;&=\; (-1)^{\mu}\varepsilon_0^{\mu} \;=\; -\varepsilon_0^{\mu} \quad &&(\text{car } \mu \equiv 1\ (2)) \\ u(\varepsilon_0') \;&=\; -u(\varepsilon_0) &&(\text{car } u(-1) = -1, \text{ cf. ci-dessous})\;, \end{aligned}$$

donc la relation (11) équivaut aussi à

(**) $$u(\varepsilon_0') \;=\; {\varepsilon_0'}^{\mu}\;,$$

qui, par le sempiternel calcul, s'écrit ainsi :

`[page 570]`

$$\eta^{-1}\xi \;=\; {\varepsilon_1'}^{2\nu}\;, \qquad \text{où } \ \nu = (\mu-1)/2\;,\ \varepsilon_1' = -\varepsilon_1 = \rho\sigma^{-1}\;.$$

Or on a ${\varepsilon_1'}^{2\nu} = (-1)^{2\nu}\varepsilon_1^{2\nu} = \varepsilon_1^{2\nu} \;=\; l_1^{\nu}$, donc la relation des lacets garde la forme

(16) $$\boxed{\xi \;=\; \eta l_1^{\nu}\;,} \qquad \text{où } \nu = (\mu-1)/2\;.$$

On doit encore prouver le

Lemme. *Soit u un automorphisme de $\mathfrak{S}$ tel que $u(\sigma)$ soit conjugué dans $\mathfrak{S}$ à σ ou à σ^{-1}, alors*

(17) $$\boxed{u(-1) \;=\; -1\;.}$$

[40] I.e. $\alpha \equiv \tau$.

On aura en effet $u(\sigma) = \mathrm{int}(\alpha)(\sigma')$, où $\sigma' = \sigma$ ou $= \sigma^{-1}$, donc $u(\sigma^2) = \mathrm{int}(\alpha)(\sigma'^2) = \mathrm{int}(\alpha)(-1) = -1$, OK.

Reste à exprimer enfin que $u(\rho) = \mathrm{int}(\alpha)(\rho)$ est conjugué à ρ^μ, et $u(\sigma)$ à σ^μ, et cela est automatique pour σ, puisque $u(\sigma) = \mathrm{int}(\beta)(\varepsilon_2(\mu)\sigma) = \mathrm{int}(\beta)(\sigma^\mu)$ (par (19)), et pour ρ cela signifie que l'on a

(17) $\alpha \equiv \tau^{\nu_3(\mu)}$ $(\mathfrak{S})$ ([41]), où $\nu_3(\mu) \in \mathbf{Z}/2$ est l'expression additive de $\varepsilon_3(\mu)$ ... `[`[42]`]` .

Donc on trouve :

Corollaire. *L'application*

(18)
$$\begin{array}{ccccccc} B_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \mathfrak{S} & \times & \mathfrak{S} & \times & \hat{\mathbf{Z}}^* \\ (u,\mu) & \longmapsto & ([u,\rho] & , & [u,\sigma] & , & \mu) \end{array}$$

est injective, et elle a comme image l'ensemble $\Sigma^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma}$ des triples (ξ,η,μ) satisfaisant les conditions suivantes :

1°) *$\xi\rho$ conjugué à $\rho^\mu = \rho^{\varepsilon_3(\mu)}$ dans $\mathfrak{S}$.*

2°) *$\xi\sigma$* `[plutôt` *$\eta\sigma$*`]` *conjugué à $\sigma^\mu = \sigma^{\varepsilon_2(\mu)}$ dans $\mathfrak{S}$.*

3°) *On a la* relation des lacets (16).

4°) *Il existe un automorphisme u de $\mathfrak{S}$, satisfaisant $u(\rho) = \xi\rho$, $u(\sigma) = \eta\sigma$.*

La conjonction des conditions 1°), 2°), 3°) est équivalente aussi à celle-ci :

(A) Il existe $(\alpha,\beta) \in \mathfrak{S}' \times \mathfrak{S}$ avec $\alpha \in \mathfrak{S}$ si et seulement si $\mu \equiv 1$ (3), i.e. $\alpha \bmod \mathfrak{S} = \tau^{\nu_3(\mu)}$, et tel qu'on ait $\xi = \alpha\rho(\alpha)^{-1}$, $\eta = \varepsilon_2(\mu)$.

Considérons l'homomorphisme de groupes

(19)
$$\begin{array}{ccc} L_0 & \xrightarrow{i_{L_0,\beta}} & B_{\rho,\sigma} \\ l & \longmapsto & (\mathrm{int}(l),1)\ , \end{array}$$

il est injectif si on suppose toujours

(20)
$$L_0 \cap \underline{\mathrm{Centr}}(\mathfrak{S}) = \{1\}\ ,$$

son image est invariante, car on a

(21)
$$u(i_{L_0,\beta}(l)) = i_{L_0,\beta}(u(l)) = i_{L_0,\beta}(l^\mu)\ ,$$

où μ est le multiplicateur. On pose

(22)
$$\Upsilon_{\rho,\sigma} = B_{\rho,\sigma}/\operatorname{Im} L_0\ ,$$

[41] qu'on écrit aussi $\tau^{\nu_3(\mu)}\alpha \in \mathfrak{S}$.

[42] `[Deux fois (17).]`

d'où [une] suite exacte canonique

$$1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow B_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1\ , \tag{23}$$

et on a un homomorphisme (déduit de $(u, \mu) \longmapsto \mu$ en factorisant par $\Upsilon_{\rho,\sigma}$)

$$\Upsilon_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\chi_\Upsilon} \hat{\mathbf{Z}}^*\ , \tag{24}$$

dont le noyau est noté $\Upsilon^+_{\rho,\sigma}$:

$$1 \longrightarrow \Upsilon^+_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow \hat{\mathbf{Z}}^* \longrightarrow 1\ . \tag{25}$$

[page 571]

Considérons les homomorphismes composés

$$\begin{array}{ccccc} \Upsilon_{\rho,\sigma} & \xrightarrow{\chi_\Upsilon} & \hat{\mathbf{Z}}^* & \xrightarrow{\varepsilon_2} & \pm 1 \\ \Upsilon_{\rho,\sigma} & \xrightarrow{\chi_\Upsilon} & \hat{\mathbf{Z}}^* & \xrightarrow{\varepsilon_3} & \pm 1 \end{array} \tag{26}$$

et surtout

$$\begin{cases} \Upsilon'_{\rho,\sigma},\ \Upsilon''_{\rho,\sigma}\ \subseteq\ \Upsilon_{\rho,\sigma} & \text{sous-groupes d'indice 2, définis par} \\ \Upsilon'_{\rho,\sigma}\ =\ \mathrm{Ker}(\varepsilon_3 \circ \chi_\Upsilon)\ , & \Upsilon''_{\rho,\sigma}\ =\ \mathrm{Ker}(\varepsilon_2 \circ \chi_\Upsilon)\ . \end{cases} \tag{27}$$

Soit maintenant

$$G_{\rho,\sigma}\ =\ (\ \underbrace{B_{\rho,\sigma} \cdot \mathfrak{S}}_{\text{semi-direct, isomorphique à } S_0 G_{\rho,\sigma}}\ )/L_0\ , \tag{28}$$

où

$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \xrightarrow{i_{L_0,B}} & B_{\rho,\sigma} & \cdot & G_{\rho,\sigma} \\ l & \longmapsto & \mathrm{int}(l) & \cdot & l^{-1}\ , \end{array} \tag{29}$$

dont l'image est invariante. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{S} \arrow[dr] & \\ L_0 \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & G_{\rho,\sigma}\ , \\ & B_{\rho,\sigma} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} \tag{30}$$

où $\mathrm{Ker}(\mathfrak{S} \longrightarrow G_{\rho,\sigma}) \simeq \mathrm{Ker}(L_0 \longrightarrow B_{\rho,\sigma}) \simeq L_0 \cap \mathrm{Centr}(\mathfrak{S})$ est trivial si et seulement si on a (20), ce qu'on va supposer par la suite. On a un homomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & L_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & B_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\delta_B"] \arrow[d, hook] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathfrak{S} \arrow[r] & G_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[dr, "\chi_G"'] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[d, "\chi_\Upsilon"] & \\ & & & \hat{\mathbf{Z}}\ . & \end{tikzcd} \tag{31}$$

Posons

$$\text{(32)} \qquad \begin{cases} Z_\rho & = & \mathrm{Centr}_{G_{\rho,\sigma}}(\rho) \\ Z_\sigma & = & \mathrm{Centr}_{G_{\rho,\sigma}}(\sigma)\ , \end{cases}$$

alors les homomorphismes induits par δ_G

$$\text{(33)} \qquad Z_\rho \xrightarrow{\delta_\rho} \Upsilon_{\rho,\sigma}\ , \qquad Z_\sigma \xrightarrow{\delta_\sigma} \Upsilon_{\rho,\sigma}$$

ont des images qui contiennent $\Upsilon'_{\rho,\sigma}$ et $\Upsilon''_{\rho,\sigma}$ respectivement.

`[page 572]`

Proposition.

1°) *L'image $\delta_\rho(Z_\rho)$ contient $\Upsilon'_{\rho,\sigma}$, et est réduite à $\Upsilon'_{\rho,\sigma}$ si et seulement si ρ et ρ^{-1} non conjugués dans $\mathfrak{S}$ – donc elle est égale à $\Upsilon_{\rho,\sigma}$; i.e. $\delta_\rho : Z_\rho \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$ épimorphique si et seulement si ρ et ρ^{-1} sont conjugués dans $\mathfrak{S}$.*

2°) *L'image $\delta_\sigma(Z_\sigma)$ contient $\Upsilon''_{\rho,\sigma}$, et elle est réduite à $\Upsilon''_{\rho,\sigma}$ si et seulement si σ et $\sigma^{-1} = -\sigma$ non conjugués dans $\mathfrak{S}$ – donc elle est égale à $\Upsilon_{\rho,\sigma}$; i.e. $\delta_\sigma : Z_\sigma \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$ épimorphique si et seulement si σ et $\sigma^{-1} = -\sigma$ sont conjugués dans $\mathfrak{S}$.*

Corollaire 1. *Si $\mathfrak{S}$ contient comme quotient* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})'$, *avec $\rho = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (modulo ± 1), alors l'image de δ_ρ est $\Upsilon'_{\rho,\sigma}$.*

En effet, on voit que ρ et $\pm\rho^{-1}$ ne sont conjugués dans $\mathfrak{S}$, car ils ne le sont pas dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})'$. Vérifions le : ρ et $-\rho^{-1}$ ont déjà des traces distinctes 1 et -1 dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, ils ne sont pas conjugués. On a $(\underbrace{\tau\sigma}_{\tau'_\infty})(\rho) = \rho^{-1}$, donc les éléments de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ qui conjuguent ρ en ρ^{-1} sont de la forme $f\tau'_\infty$, avec $f = c\rho + d$, on veut $\det(f\tau'_\infty) = 1$, i.e. $\det(f) = -1$ (car $\det(\tau'_\infty) = -1$), i.e. $c^2 + cd + d^2 = -1$, impossible.

Corollaire 2. *Si $\sigma^2 = 1$, alors $Z_\sigma \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$ est surjectif. Si par contre $\mathfrak{S}$ contient comme quotient* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ *(sans $'$!), avec ρ, σ comme d'habitude, alors* $\mathrm{Im}(\delta_\sigma) = \Upsilon''_{\rho,\sigma}$.

Il faut voir que σ et $\sigma^{-1} = -\sigma$ non conjugués dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$, en utilisant que $\tau_\infty(\sigma) = \sigma^{-1}$, donc les éléments de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ qui conjuguent σ en σ^{-1} sont les $g = f\tau_\infty$ avec $f = t\sigma + u$, et dire que $\det(g) = 1$ signifie $\det(f) = -1$, i.e. $t^2 + u^2 = -1$, impossible.

`[page 573]`

Notons que d'après (2), (4), on a

$$\text{(35)} \qquad \tau_B \overset{\text{def}}{=} (\tau, -1) \in B_{\rho,\sigma} \qquad [43]\ ,$$

et évidemment $\tau_B \notin L_0 = B_{\rho,\sigma} \cap \mathfrak{S}$. Donc on a un plongement

$$\text{(36)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}' = \{1, \tau\} \cdot \mathfrak{S} & \hookrightarrow & G_{\rho,\sigma} & \\ \tau & \longmapsto & \tau_B & \\ g & \longmapsto & g & \text{si } g \in \mathfrak{S} \end{cases} \qquad ([44])\ ,$$

[43] `[(34) n'existe pas.]`

donc l'automorphisme τ de $\mathfrak{S}$ sera considéré comme induit par $\mathrm{int}(\tau_B)$, où τ_B est considéré lui-même comme un élément de $G_{\rho,\sigma}$. En relation avec l'égalité

$$\tau_B(\sigma) \ = \ \sigma^{-1} \ \ (= \ -\sigma \ ) \ ,$$

qui montre que τ_B normalise le sous-groupe L_σ engendré par σ (isomorphe à un quotient de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$), donc normalise $Z_\sigma = \mathrm{Centr}_{G_{\rho,\sigma}}(L_\sigma)$, introduisons

$$\mathcal{N}_\sigma \ = \ \underbrace{\{1, \tau_B\} \cdot Z_\sigma}_{\text{semi-direct}} \ , \tag{37}$$

et l'homomorphisme canonique

$$\left\{ \begin{array}{ccll} \mathcal{N}_\sigma & \xrightarrow{i_\sigma} & G_{\rho,\sigma} & \\ \tau_B & \longmapsto & \tau_B & \\ x & \longmapsto & x & \quad \text{si } x \in Z_\sigma \ . \end{array} \right. \tag{38}$$

L'image de cet homomorphisme n'est autre que le normalisateur de σ dans $G_{\rho,\sigma}$, car un $g \in G_{\rho,\sigma}$ qui normalise L_σ doit transformer σ en un générateur de L_σ, i.e. en σ ou σ^{-1} ; dans le premier cas on aura $g \in Z_\sigma$, dans le deuxième $g(\sigma) = \tau_B(\sigma)$, i.e. $\tau_B^{-1} g \in Z_\sigma$, i.e. $g \in \tau_B Z_\sigma$. L'homomorphisme (38) est injectif si et seulement si $\tau_B \notin Z_\sigma$, i.e. $\sigma \neq \sigma^{-1}$, i.e. $\sigma^2 \neq 1$, i.e. "-1" $\neq 1$.

Puisqu'on y est, profitons de la formule

$$\tau_B(\rho) \ = \ \sigma(\rho^{-1})$$

pour introduire

$$\tau' \ = \ \sigma^{-1}\tau \ \in \ \mathfrak{S}' \ \subseteq \ G_{\rho,\sigma} \tag{39}$$

(qui correspond à l'élément

$$\tau'_\infty \ = \ \sigma_\infty^{-1}\tau_\infty \ = \ -\sigma_\infty\tau_\infty \ = \ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \ \in \ \underbrace{\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})}_{= \mathcal{T}_{1,1}} \ \ ) \qquad ({}^{45}) \ , \tag{40}$$

on aura donc

$$\tau'^2 \ = \ 1 \ , \qquad \tau'(\rho) \ = \ \rho^{-1} \qquad [{}^{46}] \ . \tag{40}$$

Ainsi τ' normalise le sous-groupe L_ρ (isomorphe à un quotient de $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$) engendré par ρ, donc il normalise le centralisateur Z_ρ de L_ρ, et on peut construire

$$\mathcal{N}_\rho \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \underbrace{\{1, \tau'\} \cdot Z_\rho}_{\text{(semi-direct)}} \ , \tag{41}$$

---

[44]**NB** $\mathfrak{S}'$ est un quotient de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})^\wedge$, et τ y correspond à l'image de l'élément $\tau_\infty = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})^-$.

[45]**NB** On a en même temps $\tau'(\sigma) = \sigma^{-1}$, donc on peut considérer τ' comme élément de $\mathcal{N}_\sigma$, et on a $\mathcal{N}_\sigma = \{1, \tau'\} \cdot Z_\sigma$ (produit semi-direct).

[46]`[Deux fois (40).]`

et un homomorphisme canonique

$$(42) \qquad \begin{cases} \mathcal{N}_\rho & \xrightarrow{i_\rho} & G_{\rho,\sigma} \\ \tau' & \longmapsto & \tau' \\ x & \longmapsto & x \qquad \text{pour } x \in Z_\rho \,. \end{cases}$$

L'image de cet homomorphisme est le normalisateur de L_ρ dans $G_{\rho,\sigma}$ – on le voit comme tantôt pour i_σ, en notant que ρ, ρ^{-1} sont les seuls générateurs de L_ρ. L'homomorphisme i_ρ est injectif si et seulement si $\tau' \notin Z_\rho$, i.e. $\rho \neq \rho^{-1}$, i.e. $\rho^2 \neq 1$, i.e. $\rho \neq -1$ (NB $\rho = -1$ implique que ρ commute à σ, et que $\mathfrak{S}$ est un quotient de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, avec ρ correspondant à 2 et σ à 3, mais ici $2\rho = 0$, donc $\mathfrak{S}$ est un quotient de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ avec ρ correspondant à 2, σ à $3 = -1 \ldots$).

'On a fait ce qu'il fallait' pour avoir des épimorphismes

$$(43) \qquad \begin{cases} \mathcal{N}_\rho & \xrightarrow{\delta_\rho = \delta_G \circ i_\rho} & \Upsilon_{\rho,\sigma} \\ \mathcal{N}_\sigma & \xrightarrow{\delta_\sigma = \delta_G \circ i_\sigma} & \Upsilon_{\rho,\sigma} \,. \end{cases}$$

[page 574]

Soit

$$(44) \qquad S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} = \left\{ (\alpha,\beta,\mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \equiv \tau^{\nu_3(\mu)} \text{ mod } \mathfrak{S}, \text{ i.e. } \chi(\alpha) = \varepsilon_3(\mu), \\ \underbrace{\alpha\rho(\alpha)^{-1}}_{=\xi} = \underbrace{\varepsilon_2(\mu)\beta\sigma(\beta)^{-1}}_{=\eta} l_1^\nu, \text{ où } \nu = (\mu-1)/2 \ (l_1 = \varepsilon_1^2) \end{array} \right\}$$
$$\subseteq \ \mathfrak{S}' \times \mathfrak{S} \times \hat{\mathbf{Z}}^* \,,$$

d'où

$$(45) \qquad \begin{cases} S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Sigma_{\rho,\sigma} \overset{\text{def}}{=} \left\{ (\xi,\eta,\mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi\rho \text{ conjugué dans } \mathfrak{S} \text{ à } \rho^\mu \\ \xi\sigma \text{ conjugué dans } \mathfrak{S} \text{ à } \sigma^\mu \\ \xi = \eta l_1^\nu \,, \text{ où } \nu = (\mu-1)/2 \end{array} \right\} \subseteq \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \times \hat{\mathbf{Z}}^* \\ (\alpha,\beta,\mu) \longmapsto (\overbrace{\alpha\rho(\alpha)^{-1}}^{=[\alpha,\rho]}, \varepsilon_2(\mu), \overbrace{\beta\rho(\beta)^{-1}}^{=[\beta,\sigma]}, \mu) \,. \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{G}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma}$ l'image inverse de $\Sigma^{\text{eff}}_{\rho,\sigma}$ (cf. cor. p. 570), isomorphe à $B_{\rho,\sigma}$. Par construction, on trouve donc une application *surjective*

$$(46) \qquad S\mathcal{G}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\text{épi}} \Sigma^{\text{eff}}_{\rho,\sigma} \,.$$

On considère $S\mathcal{G}_{\rho,\sigma}$ comme contenu dans un ensemble plus gros

$$(47) \qquad \mathcal{G}_{\rho,\sigma} = \left\{ (\alpha,\beta,\mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \chi(\alpha) \ \equiv \ \varepsilon_3(\mu)\chi(\beta) \\ \underbrace{\alpha\rho(\alpha)^{-1}}_{=\alpha(\rho)\rho^{-1}=\xi} \ = \ \underbrace{\varepsilon_2(\mu)\beta\sigma(\beta)^{-1}}_{=\varepsilon_2(\mu)\beta(\sigma)\sigma^{-1}=\eta} l_1^\nu \end{array} \right\} \subseteq G_{\rho,\sigma} \times G_{\rho,\sigma} \times \hat{\mathbf{Z}}^* \,,$$

de sorte que l'on aura

$$
(48)\qquad \begin{aligned} S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} &= \mathcal{G}_{\rho,\sigma} \cap (\mathfrak{S}' \times \mathfrak{S} \times \hat{\mathbf{Z}}^*) \\ &= \left\{ (\alpha,\beta,\mu) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} \delta_\sigma(\beta) &=& 1 \\ \delta_\rho(\alpha\tau^{\nu_3(\mu)}) &=& 1 \end{array} \right\} , \end{aligned}
$$

et on a encore une application canonique

$$
(49)\qquad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \Sigma_{\rho,\sigma} \\ (\alpha,\beta,\mu) & \longmapsto & ([\alpha,\rho], \varepsilon_2(\mu)[\beta,\sigma], \mu) \ . \end{array} \right.
$$

On note $\mathcal{G}^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma}$ l'image inverse de $\Sigma^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma}$, et on trouve

$$
(50)\qquad \begin{aligned} S\mathcal{G}^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} &= \mathcal{G}^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} \cap (\mathfrak{S}' \times \mathfrak{S} \times \hat{\mathbf{Z}}^*) \\ &= \left\{ (\alpha,\beta,\mu) \in \mathcal{G}^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} \,\middle|\, \begin{array}{rcl} \delta_\sigma(\beta) &=& 1 \\ \delta_\rho(\alpha\tau'^{\nu_3(\mu)}) &=& 1 \end{array} \right\} . \end{aligned}
$$

Or on a une section de

$$
(51)\qquad \begin{tikzcd} \mathcal{G}^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Sigma^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} & (\xi = [u,\rho], \eta = [u,\sigma], \mu = \chi_B(u)) \\ & B_{\rho,\sigma} \arrow[ul, "section"] \arrow[u, "\wr"'] & u \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}
$$

donée par

$$
(52)\qquad u \longmapsto (u, u\tau'^{\nu_2(\mu)}, \mu = \chi_B(u)) \ ,
$$

puisqu'on aura (posant $\varepsilon = \varepsilon_2(\mu) = (-1)^{\nu_2}$)

$$
\begin{aligned} [u,\rho] \;&=\; u\rho(u)^{-1} \;=\; \xi \\ \varepsilon[u\tau'^{\overbrace{\nu_2(\mu)}^{=\nu_2}}, \sigma] \;&=\; \varepsilon u\tau'^{\nu_2}\sigma(u\tau^{\nu_2})^{-1} \;=\; \varepsilon u(\underbrace{\tau'^{\nu_2}\sigma(\tau^{\nu_2})^{-1}}_{=\varepsilon})\sigma(u)^{-1} \;=\; u\sigma(u)^{-1} \;=\; \eta \ , \end{aligned}
$$

OK. Donc l'ensemble $\mathcal{G}_{\rho,\sigma}(u,\mu) = \varepsilon$ des (α,β,μ) au dessus d'un $(\xi,\eta,\mu) = ([u,\rho],[u,\sigma],\mu = \chi_B(u))$ sera exactement

[page 575]

$$
(53)\qquad \mathcal{G}_{\rho,\sigma}(u,\mu) \;=\; \{ \; \underbrace{(\overbrace{ua_0^{-1}}^{=\alpha}, \overbrace{u\tau'^{\nu_2}b_0^{-1}}^{=\beta}, \mu)}_{=\ (ua_0^{-1},\, ub^{-1},\, \mu)\ \text{avec}\ b = b_0\tau'^{\nu_2}} \quad | \ a_0 \in Z_\rho, \ b_0 \in Z_\sigma, \ \nu_2 = \nu_2(\mu) \} \ ,
$$

qu'on écrit aussi

$$
(54)\qquad \mathcal{G}_{\rho,\sigma}(u,\mu) \;=\; \{(\underbrace{ua_0^{-1}}_{=\alpha}, \underbrace{ui_\sigma(b)}_{=\beta}, \mu) \mid a_0 \in Z_\rho, \quad \underbrace{b \in \mathcal{N}_\sigma}_{\text{(cf. (37), (38))}} \ , \ \boxed{\varepsilon_\sigma(b) = \varepsilon_2(\mu)} \} \ ,
$$

où $\varepsilon_\sigma : \mathcal{N}_\sigma \longrightarrow \{\pm 1\}$ est défini sur (37) comme l'homomorphisme canonique s'insérant dans la suite exacte canonique

(55) $$1 \longrightarrow Z_\sigma \longrightarrow \mathcal{N}_\sigma \xrightarrow{\varepsilon_\sigma} \underbrace{\{\pm 1\}}_{\simeq \{1,\tau'\}} \longrightarrow 1 \, .$$

Si on cherche l'ensemble des éléments de $S\mathcal{G}_{\rho,\sigma}^{\rm eff}$ au dessus de (ξ,η,μ), il faut de plus imposer les conditions

(56) $$u a_0^{-1} \tau'^{\nu_3(\mu)} \in \mathfrak{S} \, , \qquad u i_\sigma(b) \in \mathfrak{S} \, ,$$

i.e.

$$\delta_G(u a_0^{-1} \tau'^{\nu_3}) = 1 \, , \qquad \delta_G(u i_\sigma(b)) = 1 \, ,$$

soit encore

(57) $$\delta_G(u) = \underbrace{\delta_\sigma(b)}_{\text{cf. (43)}} = \underbrace{\delta_\rho}_{\text{cf. (43)}}(\tau'^{\nu_3} \cdot a_0) \, .$$

Posons donc

$$a = \tau'^{\nu_3} \cdot a_0 \qquad \text{dans } \mathcal{N}_\rho \quad (\text{donc } a_0 = \tau'^{\nu_3} a) \, ,$$

on voit que

(54) $$\mathcal{G}_{\rho,\sigma}(u,\mu) = \left\{ (u a^{-1} \tau'^{\nu_3}, u b^{-1}, \mu) \,\middle|\, \begin{array}{l} a \in \mathcal{N}_\rho, \ b \in \mathcal{N}_\sigma \quad \text{tels que} \\ \varepsilon_\rho(a) = \varepsilon_3(\mu), \ \varepsilon_\sigma(b) = \varepsilon_2(\mu), \\ \delta_\rho(a) = \delta_\sigma(b) = \delta_G(u) \end{array} \right\} \qquad [47] \, .$$

Introduisons donc le groupe

(55) $$\mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0] = B_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}_\sigma$$

et les homomorphismes composés

(56) $$\begin{cases} \mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0] \longrightarrow \mathcal{N}_\rho \xrightarrow{\varepsilon_\rho} \{\pm 1\} \\ \mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0] \longrightarrow \mathcal{N}_\sigma \xrightarrow{\varepsilon_\sigma} \{\pm 1\} \end{cases}$$

(encore notés ε_ρ, ε_σ par abus de notation), et

(57) $$\mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0] \xrightarrow{\delta_{S\mathcal{M}}} \Upsilon_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\chi_\Upsilon} \hat{\mathbf{Z}}^* \, ,$$

soit $\chi_{S\mathcal{M}}$ (ou simplement χ), considérons

(58) $$\mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0] \xrightarrow{\varepsilon_{\rho,\sigma} = (\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\rho)} \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$$

et

(59) $$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0] & \xrightarrow{\varepsilon_{2,3}} & \{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \\ x & \longmapsto & (\varepsilon_2(\chi(x)) \ , \ \varepsilon_3(\chi(x))) \, , \end{array}$$

[47] [Saut dans la numérotation.]

et considérons le sous-groupe de coïncidence des deux homomorphismes précédents

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma}[0] &\overset{\text{def}}{=} \{x \in S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \mid \varepsilon_{\rho,\sigma}(x) = \varepsilon_{2,3}(x)\} \\ &= \left\{ (\underbrace{u}_{\in B_{\rho,\sigma}}, \underbrace{a}_{\in \mathcal{N}_\rho}, \underbrace{b}_{\in Z_\sigma}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \delta_B(u) = \delta_\rho(a) = \delta_\sigma(b), \quad \text{soit } \Delta \in \Upsilon_{\rho,\sigma} \\ \varepsilon_\rho(a) = \varepsilon_3(\chi_\Upsilon(\Delta)),\ \varepsilon_\sigma(b) = \varepsilon_2(\chi_\Upsilon(\Delta)) \end{array} \right\} .\end{aligned} \tag{60}$$

On a une application naturelle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma}[0] & \longrightarrow & \mathfrak{S}' \times \mathfrak{S} \times \hat{\mathbf{Z}}^* \\ (u,a,b) & \longmapsto & (\alpha,\beta,\mu) , \end{array} \tag{61}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= u a^{-1} \tau'^{\nu_\rho(a)} \\ \beta &= u b^{-1} \qquad\qquad ({}^{48}, {}^{49}) , \\ \mu &= \chi_B(u) = \chi_\rho(a) = \chi_\sigma(b) . \end{aligned}$$

et on a fait ce qu'il fallait pour que celle-ci soit injective et ait comme image $S\mathcal{G}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma}$, donc induise une bijection

$$\mathcal{M}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma}[0] \xrightarrow{\sim} S\mathcal{G}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma} . \tag{62}$$

Remarque. En fait, les formules pour (61) définissent même une application

$$\mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0] \longrightarrow \mathfrak{S}' \times \mathfrak{S} \times \hat{\mathbf{Z}}^* \qquad [^{50}] , \tag{62}$$

et pour un $(u,a,b) \in \mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0]$, son image (α,β,μ) est liée à $u \in B_{\rho,\sigma}$ par les formules

[page 576]

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u(\rho) &=& \operatorname{int}(\alpha)(\rho) & (\mathfrak{S}\text{-conjugué à } \rho^{\varepsilon'}, \text{ où } \varepsilon' = \varepsilon_\rho(a)) \\ u(\sigma) &=& \varepsilon \operatorname{int}(\beta)(\sigma) & (\mathfrak{S}\text{-conjugué à } \sigma^{\varepsilon}, \text{ où } \varepsilon' = \varepsilon_\sigma(b)) \end{array} \right. \tag{63}$$

(mais sans qu'on ait nécessairement $\varepsilon' = \varepsilon_3(\mu)$, $\varepsilon = \varepsilon_2(\mu)$).

Ceci suggère une définition d'un groupe un peu plus gros que $B_{\rho,\sigma}$, dans lequel $B_{\rho,\sigma}$ sera inclus comme sous-groupe d'indice 1, 2 ou 4 – et qui aura l'avantage, dans les 'bons cas', d'être le groupe des points adéliques d'un schéma en groupes convenable sur $\mathbf{Z}$. D'autre part, pour éliminer le signe ε dans (63) (qui est présent même si $(u,a,b) \in \mathcal{M}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma}[0]$), j'ai envie de remplacer β par

$$\beta' = \tau'^{\nu} \beta \qquad (\text{où } \nu \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \text{ tel que } (-1)^\nu = \varepsilon) . \tag{64}$$

De sorte qu'on aura

$$[u,\sigma] = \operatorname{int}(\beta')(\sigma) , \qquad \text{i.e. } [u,\sigma] = \beta'\sigma(\beta')^{-1} . \tag{65}$$

[48]**NB** On a posé $\nu_\rho(a) \in \mathbf{Z}/2$ tel que $(-1)^{\nu_\rho(a)} = \varepsilon_\rho(a)$.
[49]**NB** On a identifié $a \in \mathcal{N}_\rho$, $b \in \mathcal{N}_\sigma$ avec leurs images $i_\rho(a)$, $i_\sigma(b)$ dans $G_{\rho,\sigma}$.
[50][Deux fois (62).]

Ceci est lié à la convention qu'un $u \in \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim}$, que nous repérions par le couple $(\alpha,\beta) \in {\pi_{0,3}^{\wedge}}' \times \pi_{0,3}^{\wedge}$, sera désormais repéré par ce couple $(\alpha,\beta') \in \pi_{0,3}^{\wedge} \times {\pi_{0,3}^{\wedge}}'$, avec

(66) $\quad \chi(\alpha) \ = \ \varepsilon_3(\mu)\ , \qquad \chi(\beta') \ = \ \varepsilon_2(\mu) \qquad$ (où $\mu = \chi(u)$ est le multiplicateur) ,

ce qui pour l'opération de u sur

$$\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} \ = \ \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge\textcircled{\scriptsize{\it 1}}} \ = \ \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge}/\pm 1$$

ne change pas essentiellement les formules pertinentes

$$(67) \qquad \begin{cases} u(\rho) \ = \ \mathrm{int}(\alpha)\rho\ , \qquad u(\sigma) \ = \ \mathrm{int}(\beta)\sigma \ (= \ \mathrm{int}(\beta')\sigma \ ) \\ \alpha\rho(\alpha)^{-1} \ = \ \beta\sigma(\beta)^{-1}l_1^{\nu} \ (= \ \beta'\sigma(\beta')^{-1}l_1^{\nu})\ , \qquad \nu = \frac{\mu-1}{2}\ , \end{cases}$$

mais pour l'opération dans

$$\mathcal{T}_{1,1}^{+\wedge} \ \simeq \ \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge} \qquad \text{lui-même}$$

donne des formules plus simples, savoir, au lieu de

$$(68) \qquad \begin{cases} u(\rho) \ = \ \mathrm{int}(\alpha)\rho\ , \qquad u(\sigma) \ = \ \varepsilon\cdot\mathrm{int}(\beta)\sigma \\ \alpha\rho(\alpha)^{-1} \ = \ \varepsilon\beta\sigma(\beta)^{-1}l_1^{\nu}\ , \end{cases}$$

les formules plus sympathiques

$$(69) \qquad \begin{cases} u(\rho) \ = \ \mathrm{int}(\alpha)\rho\ , \qquad u(\sigma) \ = \ \mathrm{int}(\beta')\sigma \\ \alpha\rho(\alpha)^{-1} \ = \ \beta'\sigma(\beta')^{-1}l_1^{\nu}\ , \end{cases}$$

où le signe $\varepsilon = \varepsilon_2(\mu)$ a disparu. Il apparaît dans les formules

$$(70) \qquad \chi(\alpha) \ = \ \varepsilon_3(\mu)\ , \qquad \chi(\beta') \ = \ \varepsilon_2(\mu)\ .$$

Il me semble en avoir vu assez pour pouvoir reprendre 'à main levée' les constructions précédentes et les achever, avec des notations plus adéquates.

Le groupe $\mathfrak{S}'$, quotient de $\mathcal{T}_{1,1}^{\wedge} \simeq \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge}$, prend d'ailleurs une importance croissante dans nos calculs, c'est lui qui mérite la notation simple $\mathfrak{S}$, le sous-groupe fermé engendré par ρ, σ devenant $\mathfrak{S}^{+}$ – il correspond à $\mathcal{T}_{1,1}^{+\wedge} \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge}$. On supposera simplement que $\tau \notin \mathfrak{S}^{+}$ (τ étant l'image de τ_{∞}), ou ce qui revient au même, que

$$(71) \qquad \tau' \ \notin \ \mathfrak{S}^{+}\ .$$

[page 577]

C'est finalement cet élément, qui normalise à la fois L_{ρ} et L_{σ} via les formules remarquables

$$(*) \qquad \tau'(\rho) \ = \ \rho^{-1}\ , \qquad \tau'(\sigma) \ = \ \sigma^{-1}\ ,$$

qui prend le pas sur τ, qui satisfait à

$$(**) \qquad \tau(\varepsilon_0) \ = \ \varepsilon_0^{-1}\ , \qquad \tau(\varepsilon_1) \ = \ \varepsilon_1^{-1}\ , \qquad \text{et même } \ \tau(\sigma) \ = \ \sigma^{-1}$$

(ce qui est évidemment très vertueux !), mais dont l'action sur ρ

$$\tau(\rho) \;=\; \sigma(\rho^{-1})$$

est moins commode ([51]).

V) Données préliminaires.

1°) Soit donc $\mathfrak{S}$ un groupe profini, muni d'un homomorphisme surjectif

$$(1) \qquad \mathcal{T}_{1,1}^{\wedge} \;\simeq\; \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge} \xrightarrow{\text{épi}} \mathfrak{S}\ ,$$

ce que nous exprimerons par la donnée de trois générateurs topologiques $\rho, \sigma, \tau' \in \mathfrak{S}$, satisfaisant

$$(2) \qquad \rho^6 \;=\; \sigma^4 \;=\; \tau'^2 \;=\; 1\ , \quad \underbrace{\rho^3 \;=\; \sigma^2}_{(\text{noté } -1)}\ , \quad \tau'\rho\tau'^{-1} \;=\; \rho^{-1}\ , \quad \tau'\sigma\tau'^{-1} \;=\; \sigma^{-1}\ .$$

On désigne par $\mathfrak{S}^+$ le sous-groupe fermé engendré par ρ, σ, qui est donc l'image de

$$\mathcal{T}_{1,1}^{+\wedge} \;\simeq\; \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge}\ ,$$

et on suppose que $\mathfrak{S}^+ \neq \mathfrak{S}$, donc

$$(3) \qquad \mathfrak{S} \;\simeq\; \underbrace{\{1,\tau'\}\cdot\mathfrak{S}^+}_{(\text{semi-direct})}\ ,$$

et on a une suite exacte canonique

$$(4) \qquad 1 \longrightarrow \mathfrak{S}^+ \longrightarrow \mathfrak{S} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathfrak{S}}} \{\pm 1\} \longrightarrow 1\ .$$

On désigne aussi par $\nu_{\mathfrak{S}}$ le composé

$$(5) \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathfrak{S}}"] \arrow[rr, bend left, "\nu_{\mathfrak{S}}"] & \{\pm 1\} & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\ . \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

$$(-1)^{\nu} \longleftarrow\!\shortmid\ \nu$$

De façon générale, on désigne (par abus de langage) par une même lettre des éléments de $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})$ – tels ε_0, ε_1, $\tau = \tau_\infty$, $\tau' = \tau'_\infty$, $\sigma = \sigma_\infty$, $\rho = \rho_\infty$ etc. – et leurs images dans $\mathfrak{S}$.

2°) Les groupes $Z_{\rho,\sigma}$, $\Upsilon_{\rho,\sigma}$.

Soit

$$(6) \qquad Z_{\rho,\sigma} \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \left\{ (u,\mu,\varepsilon,\varepsilon') \;\middle|\; \begin{array}{l} u(\varepsilon_0) \;=\; \varepsilon_0^{\mu} \\ u(\rho) \text{ conjugué dans } \mathfrak{S}^+ \text{ à } \rho^{\varepsilon'} \\ u(\sigma) \text{ conjugué dans } \mathfrak{S}^+ \text{ à } \sigma^{\varepsilon} \end{array} \right\}$$

$$\subseteq \;\; \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+) \;\times\; \hat{\mathbf{Z}}^* \;\times\; \{\pm 1\} \;\times\; \{\pm 1\}\ .$$

[51] Néanmoins, τ' a sur τ le désavantage sérieux de ne pas être élément du groupe $\pi'^{\wedge}_{0,3} = \{1,\tau\}\cdot\pi^{\wedge}_{0,3}$, où on a la relation de rigidité ${\pi'^{\wedge}_{0,3}}^{\sigma} = {\pi'^{\wedge}_{0,3}}^{\rho} = \{1\}$ [`où` U^σ `est le centralisateur de` σ `dans le groupe` U] – alors que dans $\{1,\tau'\}\cdot\pi^{\wedge}_{0,3}$, le centralisateur de σ n'est *pas* réduit à 1, mais est égal à $\{1,\tau'\}$. De plus, τ' a le désavantage de ne pas être dans $\mathcal{M}^{!\sim}_{0,3}$ …

C'est un sous-groupe du groupe produit. Posons

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} L_\rho &= \text{sous-groupe de } \mathfrak{S} \text{ engendré par } \rho \\ L_\sigma &= \text{sous-groupe de } \mathfrak{S} \text{ engendré par } \sigma\ , \end{cases}$$

de sorte qu'on a des épimorphismes

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \xrightarrow{\text{épi}} L_\rho\ , & n \longmapsto \rho^n\ , \\ \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \longrightarrow L_\sigma\ , & n \longmapsto \sigma^n\ , \end{cases}$$

[page 578]

et un diagramme commutatif d'homomorphismes

$$\text{(9)} \qquad \begin{tikzcd} & L_\rho \arrow[dr, hook] & \\ \{\pm 1\} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathfrak{S}^+ \\ & L_\sigma \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

– si $\mathfrak{S}$ est 'assez gros', on aura d'ailleurs que $\{\pm 1\} \hookrightarrow \mathfrak{S}^+$, i.e. " -1" $\neq 1$ dans $\mathfrak{S}^+$, et même

$$L_\rho \cap L_\sigma \ = \ \{\pm 1\}\ .$$

Les conditions (6) impliquent donc que

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} u(L_\rho) & \mathfrak{S}^+\text{-conjugué à } L_\rho \\ u(L_\sigma) & \mathfrak{S}^+\text{-conjugué à } L_\sigma\ . \end{cases}$$

Si $\mathfrak{S}^+$ est 'assez gros' pour que ρ et ρ^{-1}, σ et σ^{-1} n'y soient pas conjugués, alors un élément $(u, \mu, \varepsilon, \varepsilon')$ de $Z_{\rho,\sigma}$ est connu par la seule connaissance de (u, μ). Si d'autre part l'homomorphisme

$$\text{(11)} \qquad \begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{Z}} & \longrightarrow & \mathfrak{S}^+ \\ n & \longmapsto & \varepsilon_0^n \end{array}$$

est injectif, alors μ est connu quand on connaît u. Donc si $\mathfrak{S}^+$ est assez gros pour satisfaire aux trois conditions envisagés, p.ex. pour qu'on ait un 'homomorphisme modulaire'

$$\text{(12)} \qquad \mathfrak{S} \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \hat{\mathbf{Z}})$$

(transformant ρ, σ, τ' en les éléments de même nom), alors un élément de $Z_{\rho,\sigma}$ est connu par la seule connaissance de $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+)$.

On a un homomorphisme

$$\text{(13)} \qquad \begin{array}{ccc} L_0 & \xrightarrow{i_{L_0,Z}} & Z_{\rho,\sigma} \\ l & \longmapsto & (\mathrm{int}(l), 1, 1, 1)\ , \end{array}$$

dont l'image est invariante, le noyau n'étant autre que $L_0 \cap \mathrm{Cent}(\mathfrak{S}^+)$. Notons que l'on a

$$L_0 \cap \mathrm{Cent}(\mathfrak{S}^+) \subseteq L_0 \cap \mathrm{Cent}_{\mathfrak{S}^+}(\rho) \subseteq L_0 \cap L_1 . \tag{14}$$

Car si $l \in L_0$ et ρ commutent, i.e. si $l = \rho(l)$, comme $\rho(L_0) = L_1$, on aura $l \in L_1$. Donc si $L_0 \cap L_1 = \{1\}$, ce qui est le cas si (12) existe, et même s'il existe seulement

$$\mathfrak{S} \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \hat{\mathbf{Z}})' \qquad \text{modulaire} , \tag{12'}$$

alors on aura

$$L_0 \cap \mathrm{Cent}(\mathfrak{S}^+) = \{1\} , \tag{15}$$

et (13) sera injectif. Nous allons le supposer, pour fixer les idées.

On pose

$$\Upsilon_{\rho,\sigma} = Z_{\rho,\sigma} / \operatorname{Im} L_0 , \tag{16}$$

de sorte qu'on aura une suite exacte canonique

$$1 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{i_{L_0,Z}} Z_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\delta_Z} \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 . \tag{17}$$

Les homomorphismes canoniques de projection $(u, \mu, \varepsilon, \varepsilon') \longmapsto \mu, \varepsilon, \varepsilon'$ se factorisent par $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ et fournissent des homomorphismes canoniques

[page 579]

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Upsilon_{\rho,\sigma} & \xrightarrow{\chi_\Upsilon} & \hat{\mathbf{Z}}^* \\ \Upsilon_{\rho,\sigma} & \xrightarrow{\varepsilon_\Upsilon} & \{\pm 1\} \\ \Upsilon_{\rho,\sigma} & \xrightarrow{\varepsilon'_\Upsilon} & \{\pm 1\} \end{array} \right. , \qquad \text{soit } \Upsilon_{\rho,\sigma} \xrightarrow{(\chi_\Upsilon, \varepsilon_\Upsilon, \varepsilon'_\Upsilon)} \hat{\mathbf{Z}}^* \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\} , \tag{18}$$

les composés de ceux-ci avec $Z_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$ sont notés

$$\chi_Z = \chi_\Upsilon \circ \delta_Z , \qquad \varepsilon_Z = \varepsilon_\Upsilon \circ \delta_Z , \qquad \varepsilon'_Z = \varepsilon'_\Upsilon \circ \delta_Z , \tag{19}$$

de sorte que

$$\chi_Z(u, \mu, \varepsilon, \varepsilon') = \mu , \qquad \varepsilon_Z(u, \mu, \varepsilon, \varepsilon') = \varepsilon , \qquad \varepsilon'_Z(u, \mu, \varepsilon, \varepsilon') = \varepsilon' . \tag{20}$$

On aurait envie de désigner par $\Upsilon^0_{\rho,\sigma}$ le noyau de $(\varepsilon_\Upsilon, \varepsilon'_\Upsilon)$, par $\Upsilon^+_{\rho,\sigma}$ celui de χ_Υ, par $\Upsilon^{0+}_{\rho,\sigma}$ leur intersection, et d'introduire par les notations $Z^0_{\rho,\sigma}$, $Z^+_{\rho,\sigma}$, $Z^{0+}_{\rho,\sigma}$ leurs images inverses dans $Z_{\rho,\sigma}$, i.e. les noyaux respectivement de $(\varepsilon_Z, \varepsilon'_Z)$, de χ_Z et de $(\chi_Z, \varepsilon_Z, \varepsilon'_Z)$.

3°) Les groupes $S_0 G_{\rho,\sigma}$, $G_{\rho,\sigma}$.

On a un homomorphisme tautologique

$$\begin{array}{rcl} Z_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+) \\ (u, \mu, \varepsilon, \varepsilon') & \longmapsto & u , \end{array} \tag{21}$$

donc $Z_{\rho,\sigma}$ opère sur $\mathfrak{S}^+$, et on peut donc considérer le produit semi-direct

$$S_0G_{\rho,\sigma} \;=\; \underbrace{Z_{\rho,\sigma}\cdot\mathfrak{S}^+}_{\text{(semi-direct)}} \;. \tag{22}$$

On a un homomorphisme

$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \xrightarrow{i_{L_0,SG}} & S_0G_{\rho,\sigma} & = & Z_{\rho,\sigma}\cdot\mathfrak{S}^+ \\ l & \longmapsto & i_{L_0,Z}(l)\cdot l^{-1}\,, & & \end{array} \tag{23}$$

dont l'image est encore invariante. On pose

$$G_{\rho,\sigma} \;=\; \underbrace{S_0G_{\rho,\sigma}}_{Z_{\rho,\sigma}\cdot\mathfrak{S}^+} /\, \mathrm{Im}\, L_0 \;, \tag{24}$$

de sorte qu'on aura une suite exacte

$$1 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{i_{L_0,SG}} S_0G_{\rho,\sigma} \longrightarrow G_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1\;, \tag{25}$$

et un diagramme commutatif d'homomorphismes

$$\begin{tikzcd} & Z_{\rho,\sigma} \arrow[dr, hook, "i_Z"] & \\ L_0 \arrow[ur, hook, "i_{L_0,Z}"] \arrow[dr, hook, "i_{L_0,\mathfrak{S}}"'] & & G_{\rho,\sigma} \\ & \mathfrak{S}^+ \arrow[ur, hook, "i_{\mathfrak{S}^+}"'] & \end{tikzcd} \tag{26}$$

(a priori $\mathrm{Ker}(\mathfrak{S}^+ \longrightarrow G_{\rho,\sigma}) \simeq \mathrm{Ker}(L_0 \longrightarrow Z_{\rho,\sigma}) = L_0 \cap \mathrm{Cent}(\mathfrak{S}^+)$, mais par hypothèse (15) il est réduit à $\{1\}$), s'insérant dans un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & L_0 \arrow[r, "i_{L_0,Z}"] \arrow[d, hook, "i_{L_0,\mathfrak{S}}"'] & Z_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\delta_Z"] \arrow[d, hook] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathfrak{S}^+ \arrow[r, "i_{\mathfrak{S}^+}"] & G_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\delta_G"] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1\,. \end{tikzcd} \tag{27}$$

On posera

$$\chi_G \;=\; \chi_\Upsilon \circ \delta_G\;, \qquad \varepsilon_G \;=\; \varepsilon_\Upsilon \circ \delta_G\;, \qquad [\varepsilon'_G \;=\;]\; \varepsilon'_\Upsilon \circ \delta_G\;, \tag{28}$$

`[page 580]`

d'où un homomorphisme

$$G_{\rho,\sigma} \xrightarrow{(\chi_G,\varepsilon_G,\varepsilon'_G)} \hat{\mathbf{Z}}^* \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}\;, \tag{29}$$

nous conduisant à introduire $G^+_{\rho,\sigma}$, $G^-_{\rho,\sigma}$, $G^{+,0}_{\rho,\sigma}$ comme d'habitude.

L'injection $i_{\mathfrak{S}^+} : \mathfrak{S}^+ \hookrightarrow G_{\rho,\sigma}$ peut se prolonger en un plongement (noté $i_{\mathfrak{S}}$)

$$i_{\mathfrak{S}} \;:\; \mathfrak{S} \hookrightarrow G_{\rho,\sigma}\;, \tag{30}$$

que je définis par sa valeur sur $\tau = \sigma\tau'$, par

$$(31) \qquad i_{\mathfrak{S}}(\tau) \;=\; i_Z(\tau_Z) \;,$$

où

$$(32) \qquad \begin{cases} \tau_Z \in Z_{\rho,\sigma} \text{ défini comme} \\ \tau_Z \;=\; (\underbrace{\mathrm{int}(\tau)|\mathfrak{S}^+}_{\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+)}, \underbrace{-1}_{\in \hat{\mathbf{Z}}^*}, \underbrace{-1}_{\in\{\pm 1\}}, \underbrace{-1}_{\in\{\pm 1\}}) \end{cases} \qquad ([52]) \;.$$

Désormais nous identifions $\mathfrak{S}$ à un sous-groupe de $G_{\rho,\sigma}$, et nous désignons par la même lettre des éléments de $\mathfrak{S}$ (tels que τ, τ', ρ, σ, ε_0, ε_1 etc.) et leurs images dans $G_{\rho,\sigma}$ ([53]). On aura d'ailleurs

$$(32 \text{ bis}) \qquad \chi_G|\mathfrak{S} \;=\; \varepsilon_G|\mathfrak{S} \;=\; \varepsilon'_G|\mathfrak{S} \;=\; \varepsilon_{\mathfrak{S}} \;:\; \begin{cases} \text{trivial sur } \mathfrak{S}^+ \\ -1 \text{ sur } \mathfrak{S}^- = \mathfrak{S} \smallsetminus \mathfrak{S}^+ \;. \end{cases}$$

4°) Les groupes Z_ρ, Z_σ, $\mathcal{N}_\rho$, $\mathcal{N}_\sigma$, $S\mathcal{N}_\rho$, $S\mathcal{N}_\sigma$ ...

On note que l'élément τ' de $\mathfrak{S} \subseteq G_{\rho,\sigma}$ normalise L_ρ et L_σ, donc normalise aussi

$$(33) \qquad \begin{cases} Z_\rho \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \mathrm{Cent}_{G_{\rho,\sigma}}(\rho) \;=\; \mathrm{Cent}_{G_{\rho,\sigma}}(L_\rho) \\ Z_\sigma \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \mathrm{Cent}_{G_{\rho,\sigma}}(\sigma) \;=\; \mathrm{Cent}_{G_{\rho,\sigma}}(L_\sigma) \;, \end{cases}$$

donc $\{1, \tau'\}$ opère sur ces groupes, et on peut considérer

$$(34) \qquad \begin{cases} \mathcal{N}_\rho \;=\; \{1,\tau'\} \cdot Z_\rho \\ \mathcal{N}_\sigma \;=\; \{1,\tau'\} \cdot Z_\sigma \end{cases} \qquad \text{(produits semi-directs)} \;.$$

On a des suites exactes canoniques

$$(35) \qquad \begin{array}{l} 1 \longrightarrow Z_\rho \longrightarrow \mathcal{N}_\rho \xrightarrow{\varepsilon_\rho} \{\pm 1\} \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow Z_\sigma \longrightarrow \mathcal{N}_\sigma \xrightarrow{\varepsilon_\sigma} \{\pm 1\} \longrightarrow 1 \;, \end{array}$$

et un diagramme commutatif d'homomorphismes canoniques

$$(36) \qquad \begin{tikzcd} & D_\rho \arrow[r] & \mathcal{N}_\rho \arrow[dr, "i_\rho"] & \\ \{1,\tau'\} \times \{\pm 1\} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & & G_{\rho,\sigma} \;, \\ & D_\sigma \arrow[r] & \mathcal{N}_\sigma \arrow[ur, "i_\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

où

$$(37) \qquad \begin{cases} D_\rho \;\simeq\; \mathbf{D}_6 \;\subseteq\; \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}) \text{ engendré par } \rho,\, \tau' \\ D_\sigma \;\simeq\; \mathbf{D}_4 \;\subseteq\; \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}) \text{ engendré par } \sigma,\, \tau' \\ \{1,\tau'\} \times \{\pm 1\} = D_\rho \cap D_\sigma \text{ dans } \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}) \;, \end{cases}$$

[52] Si τ_Υ désigne l'image de $\tau = \tau_G \in G_{\rho,\sigma}$ dans $\Upsilon_{\rho,\sigma} = G_{\rho,\sigma}/\mathfrak{S}^+$, $\mathfrak{S}$ s'identifie à l'image inverse dans $G_{\rho,\sigma}$ du sous-groupe $\{1, \tau_\Upsilon\}$ de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$.

[53] Notons que $\tau'_G \notin Z_{\rho,\sigma}$, par contre on a $\tau_G \in Z_{\rho,\sigma}$.

donc

$$(38)\qquad \begin{cases} D_\rho &= \{1,\tau'\}\cdot L_\rho \quad (\text{du moins si } \rho \text{ d'ordre 6 dans } \mathfrak{S}) \\ D_\sigma &= \{1,\tau'\}\cdot L_\sigma \quad (\text{du moins si } \sigma \text{ d'ordre 4 dans } \mathfrak{S})\ , \end{cases}$$

et les homomorphismes

$$D_\rho \longrightarrow \mathcal{N}_\rho\ , \qquad D_\sigma \longrightarrow \mathcal{N}_\sigma$$

sont évidents. Les homomorphismes i_ρ, i_σ aussi, bien sûr. Rappelons que

$$(39)\qquad \begin{cases} i_\rho \text{ injectif} \iff \tau' \notin Z_\rho \iff \rho^2 \neq 1 \iff \rho \neq -1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \iff \mathfrak{S}^+ \text{ est isomorphe à un quotient de } \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \\ i_\sigma \text{ injectif} \iff \tau' \notin Z_\sigma \iff \sigma^2 \neq 1\ . \end{cases}$$

`[page 581]`

Faisant opérer $G_{\rho,\sigma}$ sur $\mathfrak{S}^+$, sous-groupe distingué, via automorphismes intérieurs, on voit que tout élément de $G_{\rho,\sigma}$ transforme $L_\rho \subseteq \mathfrak{S}^+$ en un sous-groupe $\mathfrak{S}^+$ conjugué, donc est congru mod $\mathfrak{S}^+$ à un élément de $\mathrm{Norm}_{\mathfrak{S}}(L_\rho) = i_\rho(\mathcal{N}_\rho)$, et de même pour L_σ.

Si $g \in G_{\rho,\sigma}$, et $\varepsilon = \varepsilon_G(g)$, $\varepsilon' = \varepsilon'_G(g)$, alors $\mathrm{int}(g)(\rho) \underset{\mathfrak{S}^+}{\sim} \rho^{\varepsilon'} = \tau^{\nu'}(\rho)$, $\mathrm{int}(g)(\sigma) \underset{\mathfrak{S}^+}{\sim} \sigma^{\varepsilon} = \tau^{\nu}(\sigma)$ (où $(-1)^\nu = \varepsilon$, $(-1)^{\nu'} = \varepsilon'$), donc $\exists\, a = \tau^{\nu'}\cdot a_0 \in \mathcal{N}_\rho$ (où $a_0 = \tau^\nu g$) tel que

a) $g \equiv a\ \ (\mathfrak{S}^+)$ et

b) $\varepsilon_\rho(a) = \varepsilon' = \varepsilon_G(g)$

(et itou pour $\mathcal{N}_\sigma \ldots$) – donc $\mathrm{Im}(\mathcal{N}_\rho^{(+1)} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}) \supseteq \Upsilon'_{\rho,\sigma}$, $\mathrm{Im}(\mathcal{N}_\rho^{(-1)} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}) \supseteq \Upsilon_{\rho,\sigma} \smallsetminus \Upsilon'_{\rho,\sigma}$. Mais cela ne prouve *pas* que l'on ait commutativité ici – c'est sans doute `[phrase incomplète]`.

En d'autres termes, posant

$$(40)\quad \mathcal{N}^*_\rho \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathcal{N}_\rho \mid \varepsilon_\rho(x) = \varepsilon'_G(i_\rho(x))\}\ , \qquad \mathcal{N}^*_\sigma \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathcal{N}_\sigma \mid \varepsilon_\sigma(x) = \varepsilon'_G(i_\sigma(x))\}\ ,$$

les homomorphismes composés

$$(41)\qquad \begin{cases} \mathcal{N}^*_\rho \xrightarrow{i_\rho} G_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\delta_G} \Upsilon_{\rho,\sigma}\ , \qquad \delta_\rho \overset{\mathrm{def}}{=} \delta_G \circ i_\rho \\ \mathcal{N}^*_\sigma \xrightarrow{i_\sigma} G_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\delta_G} \Upsilon_{\rho,\sigma}\ , \qquad \delta_\sigma \overset{\mathrm{def}}{=} \delta_G \circ i_\sigma \end{cases}$$

sont des épimorphismes. On a donc `[un]` diagramme commutatif de suites exactes

$$(41)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & Z_\rho & \longrightarrow & \mathcal{N}^*_\rho & \xrightarrow{\varepsilon_\rho} & \{\pm1\} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \text{épi}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{épi}} & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & \Upsilon'_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \Upsilon_{\rho,\sigma} & \xrightarrow{\varepsilon'_\Upsilon} & \{\pm1\} & \longrightarrow & 1 \end{array} \qquad [54]\ ,$$

où on a posé

$$(42)\qquad \Upsilon'_{\rho,\sigma} = \mathrm{Ker}(\Upsilon_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\varepsilon'_\Upsilon} \{\pm1\})\ .$$

[54] `[Deux fois (41).]`

De même [un] diagramme de suites exactes

(43)
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & Z_\sigma \arrow[r] \arrow[d, "\text{épi}"] & \mathcal{N}_\sigma^* \arrow[r, "\varepsilon_\rho"] \arrow[d, "\text{épi}"] & \{\pm1\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \Upsilon''_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\varepsilon_\Upsilon"] & \{\pm1\} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} ,$$

où

(44)
$$\Upsilon''_{\rho,\sigma} \;=\; \mathrm{Ker}(\Upsilon_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\varepsilon_\Upsilon} \{\pm1\}) \;.$$

NB Les notations ε_Υ, $\varepsilon'_\Upsilon : \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow \{\pm1\}$ peuvent prêter à confusion, la première référant à l'action d'un u sur L_σ (non sur L_ρ). Une notation un peu plus lourde, mais ne prêtant pas à confusion, serait $\varepsilon_{\Upsilon,\rho}$, $\varepsilon_{\Upsilon,\sigma}$ – ou même seulement ε_ρ, ε_σ, la confusion avec les homomorphismes de ce nom $\mathcal{N}_\rho \longrightarrow \{\pm1\}$, $\mathcal{N}_\sigma \longrightarrow \{\pm1\}$ étant anodine lorsque $\rho^2 \neq 1$, $\sigma^2 \neq 1$, à cause des compatibilités (41), (43).

On a donc construit, à l'aide de (1), i.e. de $\mathfrak{S}$ muni de ρ, σ, τ', des groupes $\mathfrak{S}^+$, $G_{\rho,\sigma}$, $\Upsilon_{\rho,\sigma}$, $Z_{\rho,\sigma}$, $\mathcal{N}'_\rho$, $\mathcal{N}'_\sigma$, s'insérant dans un diagramme commutatif de groupes

(45)
$$\begin{tikzcd}
 & L_0 \simeq SZ_{\rho,\sigma} \arrow[rr] \arrow[ddd, hook] & & Z_{\rho,\sigma} \arrow[ddd, hook] \arrow[dddr, dotted, bend left, "\delta_Z"] & & \\
 & S\mathcal{N}^*_\rho \arrow[rr] \arrow[dd, hook] & & \mathcal{N}^*_\rho \arrow[dd, hook] \arrow[ddr, dotted, bend left, "\delta_\rho"] & & \\
 & S\mathcal{N}^*_\sigma \arrow[rr] \arrow[d, hook] & & \mathcal{N}^*_\sigma \arrow[d, hook] \arrow[dr, dotted, bend left, "\delta_\sigma"] & & \hat{\mathbf{Z}}^* \times \{\pm1\} \times \{\pm1\} \\
1 \arrow[r] & \mathfrak{S}^+ \arrow[rr, hook, "i_{\mathfrak{S}^+}"] \arrow[dr, hook] & & G_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\delta_G"] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[ur, "(\chi_\Upsilon{,}\varepsilon_{\Upsilon,\rho}{,}\varepsilon_{\Upsilon,\sigma})"] & 1 \\
 & & \mathfrak{S} \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

où on a posé

(46)
$$\left\{\begin{array}{lclcl} SZ_{\rho,\sigma} & = & i_{L_0,\iota}(L_0) & = & \mathrm{Ker}(\delta_Z : Z_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}) \\ S\mathcal{N}'_\rho & = & \mathrm{Ker}(\delta_\rho : \mathcal{N}^*_\rho \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}) & = & \mathrm{Cent}_{\mathfrak{S}^+}(\rho) \\ S\mathcal{N}'_\sigma & = & \mathrm{Ker}(\delta_\sigma : \mathcal{N}^*_\sigma \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}) & = & \mathrm{Cent}_{\mathfrak{S}^+}(\sigma) \end{array}\right.$$ ([55]) ,

[page 582]

de sorte qu'on a des suites exactes

(47)
$$\left\{\begin{array}{l} 1 \longrightarrow S\mathcal{N}^*_\rho \longrightarrow \mathcal{N}^*_\rho \xrightarrow{\delta_\rho} \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow S\mathcal{N}^*_\sigma \longrightarrow \mathcal{N}^*_\sigma \xrightarrow{\delta_\sigma} \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 \end{array}\right.$$ ([56]) ,

[55] NB On peut donc aussi les noter SZ_ρ, SZ_σ au lieu de $S\mathcal{N}^*_\rho$, $S\mathcal{N}^*_\sigma$.

s'envoyant dans la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathfrak{S}^+ \longrightarrow G_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1\ ,$$

de façon analogue à (27). De plus, les homomorphismes $i_\rho : \mathcal{N}^*_\rho \longrightarrow G_{\rho,\sigma}$ et $i_\sigma : \mathcal{N}^*_\sigma \longrightarrow G_{\rho,\sigma}$ ont une nette tendance à être injectifs (cf. (39)), ce qu'on a indiqué sur le diagramme (45) par le signe $\hookrightarrow$ (signe d'inclusion pointillé). On introduit aussi

$$(48) \qquad \begin{cases} \chi_\rho &= \chi_\Upsilon \circ \delta_\rho &: \mathcal{N}^*_\rho &\longrightarrow \hat{\mathbf{Z}}^* \\ \chi_\sigma &= \chi_\Upsilon \circ \delta_\sigma &: \mathcal{N}^*_\sigma &\longrightarrow \hat{\mathbf{Z}}^*\ , \end{cases}$$

dont les noyaux (qui contiennent $S\mathcal{N}_\rho$ resp. $S\mathcal{N}_\sigma$, et qu'on se gardera de confondre avec eux) sont notés comme de juste $\mathcal{N}^{*+}_\rho$, $\mathcal{N}^{*+}_\sigma$.

NB Il faudrait encore examiner les composés

$$(49) \qquad \begin{cases} \mathcal{N}^*_\rho \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\varepsilon_{\Upsilon,\sigma}} \{\pm 1\} \\ \mathcal{N}^*_\sigma \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\varepsilon_{\Upsilon,\rho}} \{\pm 1\}\ , \end{cases}$$

on verra que dans les 'bons cas', les restrictions de ces homomorphismes à Z_ρ, Z_σ respectivement sont épimorphiques.

`[page 583]`

5°) Les groupes $S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$, $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$, $S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$, $\Gamma_{\rho,\sigma}$.

On pose

$$(50) \qquad \begin{cases} S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} &= Z_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^*_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^*_\sigma \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} G_{\rho,\sigma} \\ \mathcal{M}_{\rho,\sigma} &= \mathcal{N}^*_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^*_\sigma \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} G_{\rho,\sigma} \end{cases}$$

$$(51) \qquad \begin{cases} S_0\Gamma_{\rho,\sigma} &= Z_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^*_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^*_\sigma \\ \Gamma_{\rho,\sigma} &= \mathcal{N}^*_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^*_\sigma\ , \end{cases}$$

---

[56] On a

$$(47\text{ bis}) \qquad \begin{cases} \mathrm{Im}(S\mathcal{N}_\rho \longrightarrow \mathfrak{S}^+) &= \mathrm{Norm}_{\mathfrak{S}^+}(L_\rho) \\ \mathrm{Im}(S\mathcal{N}_\sigma \longrightarrow \mathfrak{S}^+) &= \mathrm{Norm}_{\mathfrak{S}^+}(L_\sigma) \end{cases}$$

(ou encore, si $\rho^2 \neq 1$ resp. $\sigma^2 \neq 1$, ce sont $\mathcal{N}_\rho \cap \mathfrak{S}$ et $\mathcal{N}_\sigma \cap \mathfrak{S}$).

d'où [un] diagramme de suites exactes

$$
\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & L_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & L_0 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathfrak{S}^+ \arrow[r] \arrow[d, equal] & S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d] & S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathfrak{S}^+ \arrow[r] & \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d] & 1 , \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd} \tag{52}
$$

et des suites exactes

$$1 \longrightarrow \underbrace{SZ_{\rho,\sigma}}_{\simeq L_0} \times S\mathcal{N}_\rho^* \times S\mathcal{N}_\sigma^* \times \mathfrak{S}^+ \longrightarrow S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 , \tag{53}$$

$$1 \longrightarrow S\mathcal{N}_\rho^* \times S\mathcal{N}_\sigma^* \times \mathfrak{S}^+ \longrightarrow \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 , \tag{54}$$

$$1 \longrightarrow \underbrace{SZ_{\rho,\sigma}}_{\simeq L_0} \times S\mathcal{N}_\rho^* \times S\mathcal{N}_\sigma^* \longrightarrow S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 , \tag{55}$$

$$1 \longrightarrow S\mathcal{N}_\rho^* \times S\mathcal{N}_\sigma^* \longrightarrow \Gamma_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 . \tag{56}$$

On a aussi

$$S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \simeq \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z_{\rho,\sigma} , \tag{57}$$

$$S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \simeq \Gamma_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z_{\rho,\sigma} , \tag{58}$$

i.e. les extensions $S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$, $S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$ de $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$, $\Gamma_{\rho,\sigma}$ par L_0 se déduisent de l'extension $Z_{\rho,\sigma}$ de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ par L_0 par image inverse par $\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$, $\Gamma_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$ – et on a aussi

$$S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \simeq \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \times_{\Gamma_{\rho,\sigma}} S_0\Gamma_{\rho,\sigma} , \tag{59}$$

i.e. l'extension $S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ de $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ par L_0 se déduit de l'extension $S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$ de $\Gamma_{\rho,\sigma}$ par L_0, par image inverse par $\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Gamma_{\rho,\sigma}$.

On introduit un élément

$$\tau'_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}_{\rho,\sigma} , \qquad \tau'_{\mathcal{M}} = (\overbrace{\tau'_\rho}^{=a}, \overbrace{\tau'_\sigma}^{=b}, \overbrace{\tau'_G}^{=u}) , \tag{60}$$

où τ'_ρ, τ'_σ, τ'_G sont les 'avatars' de τ', pris respectivement dans $\mathcal{N}^*_\rho$, $\mathcal{N}^*_\sigma$, $G_{\rho,\sigma}$. Ceux-ci ont bien tous la même image dans $G_{\rho,\sigma}$ et a fortiori dans $\Upsilon_{\rho,\sigma}$, donc définissent un élément de $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$, dont l'opération sur $\mathfrak{S}^+$ est celle de τ. D'où un plongement

$$\mathfrak{S} \xhookrightarrow{i_{\mathfrak{S},\mathcal{M}}} \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \ : \ \begin{cases} \text{identité sur } \mathfrak{S}^+ \\ \tau'_{\mathfrak{S}} \longmapsto \tau'_{\mathcal{M}} \ . \end{cases} \tag{61}$$

`[page 584]`

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& L_0{\times}S\mathcal{N}^*_\rho{\times}S\mathcal{N}^*_\sigma \arrow[rrrrr, "\mathrm{pr}"] \arrow[ddr, "\mathrm{pr}"] \arrow[drr, hook] & & & & & L_0 \arrow[dr, hook] & & \\
& & & S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \arrow[rrrr, "\theta_Z"] \arrow[ddr] & & & & Z_{\rho,\sigma} \arrow[dd, "\delta_Z"] & \\
L_0{\times}S\mathcal{N}^*_\rho{\times}S\mathcal{N}^*_\sigma\times\mathfrak{S}^+ \arrow[uur, "\mathrm{pr}"] \arrow[ddr, "\mathrm{pr}"] \arrow[drr, hook] & & S\mathcal{N}^*_\rho{\times}S\mathcal{N}^*_\sigma \arrow[drr, hook] & & & \mathcal{N}^*_\rho \arrow[drr, "\delta_\rho"] & & & \{\pm1\} \\
& & S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \arrow[uur] \arrow[dddr] & & \Gamma_{\rho,\sigma} \arrow[ur, "\theta_\rho"] \arrow[dr, "\theta_\sigma"] & & & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[ur, "\varepsilon_{\Upsilon,\rho} = \varepsilon'_\Upsilon"] \arrow[r, "\chi_\Upsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon_{\Upsilon,\sigma} = \varepsilon_\Upsilon"'] & \hat{\mathbf{Z}}^* \\
& S\mathcal{N}^*_\rho{\times}S\mathcal{N}^*_\sigma{\times}\mathfrak{S}^+ \arrow[uur, "\mathrm{pr}"] \arrow[drrrrr, dotted, "\mathrm{pr}"] \arrow[ddrr, hook] & & & & \mathcal{N}^*_\sigma \arrow[urr, "\delta_\sigma"] & & & \{\pm1\} \\
& & & & & & \mathfrak{S}^+ \ ({}^{57}) \arrow[dr, dotted] & & \\
& & & \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \arrow[rrrr, "\theta_G"] \arrow[uuur] \arrow[urrr, dotted] & & & & G_{\rho,\sigma} \arrow[uuu, "\delta_G"'] & \\
\mathfrak{S}^+ \arrow[uuur, hook, "\mathrm{inj.}"] \arrow[dr, hook] \arrow[urrr, dotted, no head, "\mathrm{IV}"] & & & & & & & & \\
& \underbrace{\mathfrak{S}}_{=\{1,\tau'\}\cdot\mathfrak{S}^+} \arrow[uurr, hook, "i_{\mathfrak{S},\mathcal{M}}"'] \arrow[uurrrrrr, hook, dotted, "i_{\mathfrak{S},G}"'] & & & & & & &
\arrow[from=1-7, to=2-4, phantom, "\mathrm{V}"]
\arrow[from=2-6, to=3-6, phantom, "\mathrm{III}"]
\arrow[from=3-6, to=5-6, phantom, "\mathrm{I}"]
\arrow[from=6-7, to=7-4, phantom, "\mathrm{II}"]
\end{tikzcd} \tag{62}$$

On a resumé certaines des relations entre les groupes introduits jusqu'à présent dans le diagramme commutatif (62), que je commente brièvement.

a) Toutes les flèches sont soit injectives ($\hookrightarrow$), soit surjectives ($\twoheadrightarrow$), à l'exception peut-être des trois flèches issues de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$.

b) Les onze carrés (six faces d'un cube, et cinq carrés marqués I, II, III, IV, V) sont cartésiens.

c) Les cinq flèches marquées pr sont des projections canoniques de groupes produits sur des produits partiels. La flèche marquée inj. : $\mathfrak{S}^+ \longrightarrow S\mathcal{N}^*_\rho \times S\mathcal{N}^*_\sigma \times \mathfrak{S}^+$ est l'injection canonique.

d) Pour ne pas détruire la commutativité du diagramme, nous avons omis d'y faire figure les flèches (d'inclusion, moralement)

$$Z_{\rho,\sigma} \longrightarrow G_{\rho,\sigma} \ , \qquad \mathcal{N}^*_\rho \longrightarrow G_{\rho,\sigma} \ , \qquad \mathcal{N}^*_\sigma \longrightarrow G_{\rho,\sigma} \ ,$$

qui figurent dans (45).

[57] `[`$\mathfrak{S}^+$` barré. Probablement la partie du diagramme comprenant ce sommet `$\mathfrak{S}^+$` et les flèches correspondantes est invalide.]`

e) Pour ne pas surcharger le diagramme, je n'ai pas introduit dans ce diagramme de notation pour certaines flèches composées utiles, telles

$$(63)\qquad \begin{cases} \delta_\Gamma & : & \Gamma_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \Upsilon_{\rho,\sigma} \\ \delta_{S_0\Gamma} & : & S_0\Gamma_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \Upsilon_{\rho,\sigma} \\ \delta_{\mathcal{M}} & : & \mathcal{M}_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \Upsilon_{\rho,\sigma} \\ \delta_{S_0\mathcal{M}} & : & S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \Upsilon_{\rho,\sigma}\ , \end{cases}$$

et

$$(64)\qquad \begin{cases} \chi_\Gamma & = & \chi_\Upsilon\circ\delta_\Gamma & : & \Gamma_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \hat{\mathbf{Z}}^* \\ \chi_{S_0\Gamma} & = & \chi_\Upsilon\circ\delta_{S_0\Gamma} & : & S_0\Gamma_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \hat{\mathbf{Z}}^* \\ \chi_{\mathcal{M}} & = & \chi_\Upsilon\circ\delta_{\mathcal{M}} & : & \mathcal{M}_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \hat{\mathbf{Z}}^* \\ \chi_{S_0\mathcal{M}} & = & \chi_\Upsilon\circ\delta_{S_0\mathcal{M}} & : & S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \hat{\mathbf{Z}}^*\ , \end{cases}$$

et les composés $\varepsilon_{?,\rho}$, $\varepsilon_{?,\sigma} : ? \longrightarrow \{\pm 1\}$, où ? peut prendre toute valeur Z, G (déja introduits), $\mathcal{N}_\rho^*$, $\mathcal{N}_\sigma^*$ (on aura $\varepsilon_{\mathcal{N}_\rho,\rho} = \varepsilon_\rho$, $\varepsilon_{\mathcal{N}_\sigma,\sigma} = \varepsilon_\sigma$), Γ, $S_0\Gamma$, $\mathcal{M}$, $S_0\mathcal{M}$. Le noyau de $\chi_?$ est noté $?^*$, celui de $\varepsilon_{?\,\rho}$ est noté $?'$, celui de $\varepsilon_{?\,\sigma}$ est noté $?''$, on note $?^\circ = ?' \cap ?''$, $?^{+'} = ?^+ \cap ?'$, $?^{+''} = ?^+ \cap ?''$, $?^{+,\circ} = ?^+ \cap ?^\circ$, $S? = \operatorname{Ker}\delta_?$, donc

$$(65)\qquad \begin{tikzcd} & ?^{\prime +} \arrow[dr, hook] \arrow[ddd, hook] & \\ ?^{0\,+} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[ddd, hook] & & ?^{+} \arrow[ddd, hook] \\ & ?^{\prime\prime +} \arrow[ur, hook] \arrow[ddd, hook] & \\ & ?^{\prime} \arrow[dr, hook] & \\ ?^{0} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & ? \\ & ?^{\prime\prime} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

est 'cartésien' [où $?^{\circ\,+} = ?^{+,\circ}$, $?^{\prime +} = ?^{+'}$ et $?^{\prime\prime +} = ?^{+''}$].

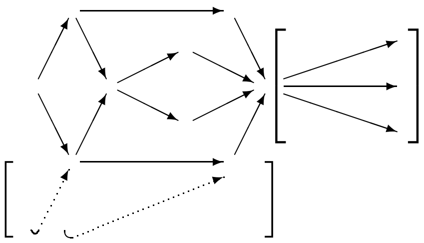
f) Rappelons aussi qu'on a commutativité dans

$$(66)\qquad \begin{tikzcd} & \{\pm 1\} \arrow[dr] & \\ \mathfrak{S} \arrow[ur, "\varepsilon_{\mathfrak{S},\rho}"] \arrow[rr, "\chi_{\mathfrak{S}}"] \arrow[dr, "\varepsilon_{\mathfrak{S},\sigma}"'] & & \hat{\mathbf{Z}}^* \\ & \{\pm 1\} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad , \qquad \text{soit } \varepsilon_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \longrightarrow \{\pm 1\}.$$

[page 585]

Le noyau de $\varepsilon_{\mathfrak{S}}$ n'est autre que $\mathfrak{S}^+$. En tant que sous-groupe de $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ (resp. de $G_{\rho,\sigma}$) $\mathfrak{S}$ s'identifie à l'image inverse dans ce groupe du sous-groupe $\{1, \tau'_\Gamma\}$ de $\Gamma_{\rho,\sigma}$ (resp. du sous-groupe $\{1, \tau'_\Upsilon\}$ de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$), où τ'_Γ, τ'_Υ désignent les images de $\tau' \in \mathfrak{S}$ dans $\Gamma_{\rho,\sigma}$ et $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ respectivement.

g) Le diagramme (62) a comme partie principale

(67)  ,

tous les groupes marqués sur ce dernier diagramme, à l'exception de $\hat{\mathbf{Z}}^*$, $\{\pm 1\}$, $\{\pm 1\}$ (mis entre crochets [ ]) s'envoient dans $\Upsilon_{\rho,\sigma}$, qui est le terme terminal de ce diagramme, reliant 9 groupes (en ne comptant pas $\mathfrak{S}$, inséré comme source de deux flèches pointillés) dans $\Upsilon_{\rho,\sigma}$, déduits de quatre d'entre eux $Z_{\rho,\sigma}$, $\mathcal{N}_\rho^*$, $\mathcal{N}_\sigma^*$, $G_{\rho,\sigma}$ (qui s'envoient dans $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ par des épimorphismes) en prenant des produits fibrés sur $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ de certains d'entre eux – le terme initial étant $S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$, qui est le produit fibré des quatre facteurs précédents. En prenant les noyaux des homomorphismes des ces neuf groupes dans $\Upsilon_{\rho,\sigma}$, on trouve un diagramme de même type combinatoire, reliant neuf groupes formés de $L_0 = SZ_{\rho,\sigma}$, $S\mathcal{N}_\rho^*$, $S\mathcal{N}_\sigma^*$ et $\mathfrak{S}^+ = SG_{\rho,\sigma}$ et de certains produits de ces groupes (dont le produit sur l'ensemble d'indices vide, savoir $\{1\} = \mathrm{Ker}(\Upsilon_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\mathrm{id}} \Upsilon_{\rho,\sigma})$), avec comme flèches des projections canoniques. Nous avons inséré dans (62) seulement cinq parmi ces groupes produits, avec les injections canoniques dans les produits fibrés dont ils proviennent, en nous dispensant d'y faire figurer également $S\mathcal{N}_\rho^*$, $S\mathcal{N}_\sigma^*$, $SG_{\rho,\sigma} = \mathfrak{S}^+$, les inclusions canoniques $S\mathcal{N}_\rho^* \hookrightarrow \mathcal{N}_\rho^*$, $S\mathcal{N}_\sigma^* \hookrightarrow \mathcal{N}_\sigma^*$, $\mathfrak{S}^+ = SG_{\rho,\sigma} \hookrightarrow G_{\rho,\sigma}$, et le diagramme complet des projections des produits partiels de ces groupes et de L_0, où manquent donc les projections sur ces trois groupes, et les homomorphismes de ces groupes et de L_0 dans le groupe unité.

`[page 586]`

6°) Liens avec $\Sigma_{\rho,\sigma}$, $S\mathcal{G}_{\rho,\sigma}$.

On pose

(68)
$$\Sigma_{\rho,\sigma} = \left\{ (\xi,\eta,\mu,\varepsilon',\varepsilon) \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi\rho \ \mathfrak{S}^+\text{-conjugué à } \rho^{\varepsilon'} \\ \eta\sigma \ \mathfrak{S}^+\text{-conjugué à } \sigma^{\varepsilon} \\ \xi = \eta \ \underbrace{\varepsilon_1^{\mu-1}}_{=\ l_1^\nu,\text{ où } \nu = \frac{\mu-1}{2}} \end{array} \right\}$$
$$\subseteq \ \mathfrak{S}^+ \times \mathfrak{S}^+ \times \hat{\mathbf{Z}}^* \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\} .$$

NB Si ρ non conjugué à ρ^{-1} dans $\mathfrak{S}^+$, ε' connu quand on connaît ξ, η – de même si σ non conjugué à σ^{-1} (donc $\sigma^2 \neq 1$), ε' est déterminé par ξ, η. De même si $\hat{\mathbf{Z}} \longrightarrow L_0$ ($n \longmapsto \varepsilon_0^n$) est injectif, alors μ est déterminé par ξ, η, et la relation $\xi = \eta\varepsilon_1^{\mu-1}$ s'écrit aussi (sans faire intervenir μ)

(69)
$$\eta^{-1}\xi \ \in \ L_1 .$$

Soit d'autre part

(70)
$$S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} = \{(\alpha,\beta,\mu) \mid \underbrace{[\alpha,\rho]}_{=\xi} = [\beta,\sigma]\varepsilon_1^{\mu-1}\}$$
$$\subseteq \ \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \times \hat{\mathbf{Z}}^* .$$

On a une application

$$(71)\qquad \begin{cases} S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \Sigma_{\rho,\sigma} \\ & & \\ (\alpha,\beta,\mu) & \longmapsto & (\xi,\eta,\mu,\varepsilon',\varepsilon)\ , \\ & & \end{cases} \qquad \text{avec} \begin{cases} \xi & = & [\alpha,\rho] \\ \eta & = & [\beta,\sigma] \\ \mu & \text{le même} & \\ \varepsilon' & = & \varepsilon_{\mathfrak{S}}(\alpha) \\ \varepsilon & = & \varepsilon_{\mathfrak{S}}(\beta) \end{cases} ,$$

qui est évidemment *surjective* ([58]).

On définit d'autre part

$$(72)\qquad \begin{aligned} \Sigma^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} &= \{(\xi,\eta,\mu,\varepsilon',\varepsilon)\in\Sigma_{\rho,\sigma} \mid \exists\, u\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+) \text{ avec } u(\rho)=\xi\rho,\ u(\sigma)=\eta\sigma\} \\ &\subseteq \Sigma_{\rho,\sigma} \end{aligned} \qquad ([59])$$

(cet u sera alors unique, et inversement, la connaissance de u détermine ξ, η). Il y a correspondance 1–1 entre les éléments de $\Sigma^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma}$, et les systèmes $(u,\mu,\varepsilon',\varepsilon)\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+)\times\hat{\mathbf{Z}}^*\times\{\pm1\}\times\{\pm1\}$, tels que l'on ait

$$\begin{cases} u(\rho) \text{ est } \mathfrak{S}^+\text{-conjugué à } \rho^{\varepsilon'} \\ u(\sigma) \text{ est } \mathfrak{S}^+\text{-conjugué à } \sigma^{\varepsilon} \\ u(\varepsilon_0)=\varepsilon_0^{\mu} \text{ (qui exprime } \xi=\eta l_1^{\nu}) \end{cases}$$

– or cet ensemble n'est autre que le sous-groupe $Z_{\rho,\sigma}$ de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+)\times\hat{\mathbf{Z}}^*\times\{\pm1\}\times\{\pm1\}$ (cf. (6), p. 577). On trouve ainsi une bijection

$$(73)\qquad \begin{array}{ccc} Z_{\rho,\sigma} & \xrightarrow{\ \sim\ } & \Sigma^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} \\ & & \\ u & \longmapsto & (\xi,\eta,\mu,\varepsilon',\varepsilon)\ , \end{array} \qquad \begin{cases} \xi & = & [u,\rho] \\ \eta & = & [u,\sigma] \\ \mu & = & \chi(u) \\ \varepsilon' & = & \varepsilon'_Z(u) \\ \varepsilon & = & \varepsilon_Z(u) \end{cases} .$$

On désigne par $S\mathcal{G}^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma}$ l'image inverse de $\Sigma^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma}$ dans $S\mathcal{G}_{\rho,\sigma}$ par (71), donc on aura

$$(74)\qquad \begin{aligned} S\mathcal{G}^{\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma} &= \left\{ (\alpha,\beta,\mu)\in\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}\times\hat{\mathbf{Z}}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} [\alpha,\rho]=[\beta,\sigma]\varepsilon_1^{\mu-1} \\ \exists\, u\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+) \text{ tel qu'on ait} \\ \begin{cases} u(\rho) = \alpha(\rho) \quad (= \xi\rho\ , \quad \text{avec} \quad \xi=[\alpha,\rho]\,) \\ u(\sigma) = \beta(\sigma) \quad (= \eta\sigma\ , \quad \text{avec} \quad \eta=[\beta,\sigma]\,) \end{cases} \end{array} \right\} \\ &\subseteq S\mathcal{G}_{\rho,\sigma}\ , \end{aligned}$$

[58]**NB** $\xi=\alpha\rho(\alpha)^{-1}\in\mathfrak{S}^+$, car on a $\varepsilon_{\mathfrak{S}}(\xi)=\dot\alpha\rho(\dot\alpha)=1$, car ρ opère trivialement sur $\mathfrak{S}/\mathfrak{S}^+\simeq\{\pm1\}$, pour la même raison $\eta=\beta\sigma(\beta)^*\in\mathfrak{S}^+$.

[59]I.e. $[u,\rho]=\xi$, $[u,\sigma]=\eta$.

de sorte qu'on a un homomorphisme *surjectif* induit par (73)

$$SG^{\text{eff}}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Sigma^{\text{eff}}_{\rho,\sigma} \ . \tag{75}$$

`[page 587]`

On a une application canonique

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_0\Gamma_{\rho,\sigma} = Z_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^*_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^*_\sigma & \longrightarrow & SG^{\text{eff}}_{\rho,\sigma} \\ x = (u,a,b) & \longmapsto & (\alpha,\beta,\mu)\ , \ \text{avec} \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & u\,\overbrace{a^{-1}\tau'^{\nu'(x)}}^{\in Z_\rho} \\ \beta & = & u\,\underbrace{b^{-1}\tau'^{\nu(x)}}_{\in Z_\sigma} \\ \mu & = & \chi_{S\Gamma}(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{76}$$

[60]

où on a défini $\nu'(x)$, $\nu(x) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par

$$(-1)^{\nu'(x)} = \varepsilon'(x)\ , \qquad (-1)^{\nu(x)} = \varepsilon(x)\ .$$

Par définition de $S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$ comme produit fibré, on aura en effet ua^{-1}, $ub^{-1} \in \mathfrak{S}^+$, donc α, $\beta \in \mathfrak{S}$; on aura d'ailleurs

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha(\rho) & = & u(\underbrace{a^{-1}(\underbrace{\tau'^{\nu'(x)}(\rho)}_{=\rho^{\varepsilon'(x)}})}_{=(\rho^{\varepsilon'(x)})^{\varepsilon'(x)}=\rho}) = u(\rho)\ , \qquad \text{et de même} \\ \beta(\sigma) & = & u(\sigma)\ , \end{array} \right. \tag{77}$$

[61, 62]

d'ailleurs la condition $\underbrace{[\alpha,\rho]}_{=[u,\rho]} = \underbrace{[\beta,\sigma]}_{=[u,\sigma]} \cdot \varepsilon_1^{\mu-1}$ ne fait qu'exprimer la condition que $u(\varepsilon_0) = \varepsilon_0^\mu$ qui intervient dans la définition même de $Z_{\rho,\sigma}$. Je dis que l'application envisagée (76) est injective. Il suffit de voir que quand (α,β,μ) sont connus, on connaît u – en effet, on a en termes de (α,β,μ)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu'(x) = \nu_{\mathfrak{S}}(\alpha)\ , \qquad \nu(x) = \nu_{\mathfrak{S}}(\beta)\ , \qquad \chi_{S\Gamma}(x) = \chi_Z(u) = \mu\ , \\ \text{d'où} \qquad a = \tau'^{\nu(\alpha)}\alpha^{-1}u\ , \qquad b = \tau'^{\nu(\beta)}\beta^{-1}u\ , \end{array} \right. \tag{78}$$

donc si u est connu, on connaît également a et b, donc x. D'autre part pour déterminer $u \in Z_{\rho,\sigma} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+) \times \hat{\mathbf{Z}}^* \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ en termes de (α,β,μ), il suffit en vertu de (78) de déterminer l'élément de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+)$ qu'il définit, ce qui est immédiat sur (77). On a donc

$$S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \hookrightarrow SG^{\text{eff}}_{\rho,\sigma}\ , \tag{79}$$

[60] Pour être plus correct, il faudrait écrire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & u\,i_\rho(a)^{-1}\tau'^{\nu'(x)} \\ \beta & = & u\,i_\sigma(b)^{-1}\tau'^{\nu(x)} \end{array} \right. .$$

[61] I.e.

$$\begin{array}{rcl} [\alpha,\rho] & = & [u,\rho] \\ [\beta,\sigma] & = & [u,\sigma]\ . \end{array}$$

[62] **NB** On a, pour tout $a \in \mathcal{N}^*_\rho$, si $\varepsilon_\rho(a) = (-1)^{\nu_\rho(a)}$, $a\tau'^{\nu_\rho(a)} \in Z_\rho$, donc $[ua\tau'^{\nu_\rho(a)},\rho] = [u,\rho]$. Itou pour σ …

il reste à voir que cette application est surjective, on a fait ce qu'il fallait pour. Notons d'abord que le composé

$$S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \hookrightarrow S\mathcal{G}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\text{épi}} \Sigma_{\rho,\sigma} \ (\xrightarrow{\sim} Z_{\rho,\sigma})$$

n'est autre, par (77) et (71), que

$$(80) \qquad x = (u,a,b) \longmapsto (\xi,\eta,\mu,\varepsilon',\varepsilon) \quad \left|\begin{array}{lll} \xi & = & [u,\rho]\,, \quad \text{donc} \quad u(\rho) = \xi\rho \\ \eta & = & [u,\sigma]\,, \quad \text{donc} \quad u(\sigma) = \xi\sigma \\ \mu & = & \chi_{S\Gamma}(x) \\ \varepsilon' & = & \varepsilon'(x) \\ \varepsilon & = & \varepsilon(x) \end{array}\right. ,$$

donc son composé avec $\Sigma^{\text{eff}}_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\sim} Z_{\rho,\sigma}$ n'est autre que la projection canonique

$$\begin{array}{ccc} S_0\Gamma_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & Z_{\rho,\sigma} \\ (u,a,b) & \longmapsto & u\,, \end{array}$$

qui est surjective, de noyau $S\mathcal{N}^*_\rho \times S\mathcal{N}^*_\sigma = SZ_\rho \times SZ_\sigma$. Considérons d'autre part

$$(81) \qquad \left\{\begin{array}{l|l} \text{opérations de } S\mathcal{N}_\rho \times S\mathcal{N}_\sigma \text{ sur} & (a_0,b_0) \in S\mathcal{N}^*_\rho \times S\mathcal{N}^*_\sigma \\ \quad S\mathcal{G}_{\rho,\sigma} & \qquad = SZ_\rho \times SZ_\sigma \\ = \ \{(\alpha,\beta,\mu) \mid [\alpha,\rho] = [\beta,\sigma]\varepsilon_1^{\mu-1}\} & \text{opère par} \\ \subseteq \ \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \times \hat{\mathbf{Z}}^* & (\alpha,\beta,\mu) \longmapsto (\alpha a_0, \beta b_0, \mu) \end{array}\right\} .$$

Il est clair qu'il opère librement, et que le quotient de $\mathcal{G}_{\rho,\sigma}$ par cette action s'identifie à $\Sigma_{\rho,\sigma}$, donc on a le résultat idoine pour $\mathcal{G}^*_{\rho,\sigma}$ et $\Sigma^*_{\rho,\sigma}$. Or, pour

`[page 588]`

$$(82) \qquad \varepsilon = (-1)^\nu\,, \qquad \varepsilon' = (-1)^{\nu'}$$

fixés, l'opération précédente de (a_0,b_0) correspond, par l'application (76), à l'opération

$$(83) \qquad (u,a,b) \longmapsto (u, \tau^{\nu'}(a_0^{-1})a, \tau^\nu(b_0^{-1})b)\,,$$

i.e. à la translation à gauche par $(\tau^{\nu'},\tau^\nu)\underbrace{(a_0^{-1},b_0^{-1})}_{=(a_0,b_0)^{-1}}$. D'où la surjectivité, et l'isomorphie cherchée

$$(84) \qquad S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\sim} S\mathcal{G}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma} \qquad (\text{cf. } 76)\,.$$

La translation à gauche par $l \in L_0$ dans $S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$ correspond, par la bijection précédente, à l'opération

$$(85) \qquad (\alpha,\beta,\mu) \longmapsto (l\alpha, l\beta, \mu)\,,$$

dont il était clair a priori qu'elle stabilise $S\mathcal{G}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma}$. Passant au quotient, on trouve donc

(86) $$\Gamma_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\sim} L_0\backslash S\mathcal{G}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma} \,.$$

Enfin, considérons

(87) $$\left\{\begin{array}{rcl} S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & S\mathcal{G}^{\text{eff}}_{\rho,\sigma} \times \mathfrak{S}^+ \\ & = & \{(\alpha,\beta,\mu,f)\in \mathfrak{S}\times\mathfrak{S}\times\hat{\mathbf{Z}}^*\times\mathfrak{S}^+ \mid [\alpha,\rho]=[\beta,\sigma]\varepsilon_1^{\mu-1}\} \\ x \;=\; (u,a,b,U) & \longmapsto & ((\alpha,\beta,\mu),f) \\ & & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & ua^{-1}\tau'^{\nu_\rho(a)} \\ \beta & = & ub^{-1}\tau'^{\nu_\sigma(b)} \\ \mu & = & \chi_{S\mathcal{M}}(x) \;\; (=\chi_Z(u)=\chi_\rho(a)=\chi_\sigma(b)=\chi_G(U)\,) \\ f & = & uU^{-1}\,. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Cette application est bijective (trivial par (89)).

7°) Fonctorialités.

Considérons

(88) $\mathfrak{S} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{S}'$, homomorphisme surjectif de groupes profinis.

Soient $\rho_{\mathfrak{S}'}$, $\sigma_{\mathfrak{S}'}$, $\tau'_{\mathfrak{S}'}$, … les images de $\rho=\rho_{\mathfrak{S}}$, $\sigma=\sigma_{\mathfrak{S}}$, $\tau'=\tau'_{\mathfrak{S}}$, … dans $\mathfrak{S}'$.

Proposition. *Conditions équivalentes sur* φ *:*

a) *L'application induite par* φ

(89) $$\Sigma^{\mathfrak{S}}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Sigma^{\mathfrak{S}'}_{\rho,\sigma}$$

applique $\Sigma^{\mathfrak{S}\ \text{eff}}_{\rho,\sigma}$ *dans* $\Sigma^{\mathfrak{S}'\ \text{eff}}_{\rho,\sigma}$.

b) *Pour tout* $u\in \operatorname{Aut}\mathfrak{S}^+$, *qui normalise* L_0, *et tel que* $u(L_\rho) \underset{\mathfrak{S}^+}{\sim} L_\rho$, $u(L_\sigma) \underset{\mathfrak{S}^+}{\sim} L_\sigma$, *il existe* $u'\in\operatorname{Aut}(\mathfrak{S}'^+)$ *qui rend commutatif*

(90) $$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}^+ & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{S}'^+ \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} \\ \mathfrak{S}^+ & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{S}'^+ \end{array}\,,$$

en d'autres termes, u *invarie* $\operatorname{Ker}\varphi$.

b′) *Itou, en supposant seulement, à la place que* u *normalise* L_0, *que* $u(L_0) \underset{\mathfrak{S}^+}{\sim} L_0$ *(plus les autres conditions).*

c) *Il existe un homomorphisme de groupes*

(91) $$\varphi_Z \;:\; Z^{\mathfrak{S}}_{\rho,\sigma} \longrightarrow Z^{\mathfrak{S}'}_{\rho,\sigma}$$

compatible avec χ, ε_Z, ε'_Z *et tel que* $\forall\, u\in Z^{\mathfrak{S}}_{\rho,\sigma}$, *si* u' *est son image, on ait comme dans* (90). (**NB** φ_Z *sera unique, et est compatible avec* $i_{L_0,Z}$ (^{63})).

c$'$) *Il existe un homorphisme de groupes*

(92) $$\varphi_G \;:\; G^{\mathfrak{S}}_{\rho,\sigma} \longrightarrow G^{\mathfrak{S}'}_{\rho,\sigma}$$

compatible avec χ_G, ε_G, ε'_G et satisfaisant à la condition de compatibilité (90). *(NB Ce φ_G*

[page 589]

est alors unique, et compatible avec $i_{\mathfrak{S},G}$, $i_{Z,G}$, il applique $Z^{\mathfrak{S}}_\rho$ dans $Z^{\mathfrak{S}'}_\rho$, $Z^{\mathfrak{S}}_\sigma$ dans $Z^{\mathfrak{S}'}_\sigma$, qui se prolonge en $\varphi_\rho : \mathcal{N}^{\mathfrak{S}}_\rho \longrightarrow \mathcal{N}^{\mathfrak{S}'}_\rho$, induisant $\mathcal{N}^{*\,\mathfrak{S}}_\rho \longrightarrow \mathcal{N}^{*\,\mathfrak{S}'}_\rho$, et se prolonge en $\varphi_\sigma : \mathcal{N}^{\mathfrak{S}}_\sigma \longrightarrow \mathcal{N}^{\mathfrak{S}'}_\sigma$, induisant $\mathcal{N}^{*\,\mathfrak{S}}_\sigma \longrightarrow \mathcal{N}^{*\,\mathfrak{S}'}_\sigma$ ...)

On dira alors que φ est *prolongeable.*

Corollaire. *On peut alors prolonger φ en*

(93) $$\varphi_{S\mathcal{M}} \;:\; S_0G^{\mathfrak{S}}_{\rho,\sigma} \longrightarrow S_0G^{\mathfrak{S}'}_{\rho,\sigma}\;,$$

compatible avec θ_Z, θ_ρ, θ_σ, θ_G, compte tenu de φ_Z, φ_ρ, φ_σ, φ_G, et ceci de façon 'compatible avec tout', notamment avec les diagrammes (45), (62).

Exemple. Supposons $\Sigma^{\mathfrak{S}'}_{\rho,\sigma} = \Sigma^{\mathfrak{S}'\,\mathrm{eff}}_{\rho,\sigma}$, alors les conditions de la proposition sont automatiquement satisfaites (quelque soit l'homomorphisme surjectif $\mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}'$).

Remarque. Il se peut qu'on se donne un sous-groupe $Z^\natural_{\rho,\sigma} \subseteq Z^{\mathfrak{S}}_{\rho,\sigma}$, et qu'on considère la condition a) de la proposition seulement pour des $u \in Z^\natural_{\rho,\sigma}$ ([64]). Mais à l'aide de $Z^\natural_{\rho,\sigma}$, on construit

(94) $$\begin{array}{l} G^\natural_{\rho,\sigma} \;=\; Z^\natural_{\rho,\sigma}\cdot\mathfrak{S}^+\,, \qquad Z^\natural_\rho \;=\; Z_\rho \cap G^\natural_{\rho,\sigma}\,, \qquad Z^\natural_\sigma \;=\; Z_\sigma \cap G^\natural_{\rho,\sigma} \\ \text{d'où } \mathcal{N}^\natural_\rho \text{ et } \mathcal{N}^{\natural *}_\rho\,,\ \mathcal{N}^\natural_\sigma \text{ et } \mathcal{N}^{\natural *}_\sigma\,,\ \Upsilon^\natural_{\rho,\sigma}\,,\text{ puis } S_0\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \text{ et } \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}\,. \end{array}$$

Ceci posé, on a une variante évidente de la proposition, donnant des conditions de prolongement de φ en $S_0\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \longrightarrow S_0\mathcal{M}^{\mathfrak{S}'}_{\rho,\sigma}$.

[page 590]

8°) Le cas universel $\mathfrak{S} = \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})^\wedge$.

Considérons la suite exacte

(1) $$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{N}^\sim_{1,1}}_{=\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}^\sim_{0,3} \longrightarrow 1\,.$$

On a

(2) $$\{\pm 1\} \;=\; \mathrm{Centre}(\mathcal{M}) \;=\; \mathrm{Centre}(\hat{\mathfrak{S}}^+) \qquad ({}^{65})\,,$$

[63] Donc il induit $\Upsilon^{\mathfrak{S}}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon^{\mathfrak{S}'}_{\rho,\sigma}$.

[64] Il faut supposer pour être à l'aise que $\tau'_Z \in Z^\natural_{\rho,\sigma}$.

d'où par (1) une application

(3) $$\mathcal{M}_{0,3}^{\sim} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \xrightarrow[\mathfrak{S}^{+\wedge} = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^\wedge]{\text{restriction à}} \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^{+\wedge})\ .$$

D'ailleurs, tout automorphisme de $\mathfrak{S}^{+\wedge}$ invarie son centre, donc passe au quotient, d'où

(4) $$\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^{+\wedge}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^{+\wedge}/\pm 1 \simeq \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge})\ ,$$

et le composé de (3) avec (4) est l'homomorphisme canonique

(5) $$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{0,3}^{\sim} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^{+\wedge}) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} = \mathfrak{S}^{+\wedge}/\{\pm 1\})\ . & \end{tikzcd}$$

Cela montre que (3) est injectif, puisque $\mathcal{M}_{0,3}^{\sim} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge})$ l'est.

Remarque. L'application $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^{+\wedge}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge})$ n'est pas injective par contre, les éléments du noyau correspondant aux homomorphismes

$$\mathfrak{S}^{+\wedge} \longrightarrow \mathrm{Centre}(\mathfrak{S}^{+\wedge}) = \{\pm 1\}\ ,$$

ou encore aux homomorphismes

(6) $$\mathfrak{S}_{\mathrm{ab}}^{+\wedge} \longrightarrow \{\pm 1\}\ , \qquad \text{ou encore} \qquad (\mathfrak{S}_{\mathrm{ab}}^{+\wedge})_2 \longrightarrow \{\pm 1\}\ .$$

Or on veut que

$$\mathfrak{S}_{\mathrm{ab}}^{+\wedge} = \left\{ \rho, \sigma \;\middle|\; \begin{array}{l} \rho^6 = \sigma^4 = [\rho,\sigma] = 1 \\ \rho^3 = \sigma^2 \end{array} \right\} \simeq \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}\ , \qquad \begin{array}{lcl} \rho & \longmapsto & 2 \bmod 12 \\ \sigma & \longmapsto & 3 \bmod 12 \end{array}$$

`[plutôt` $\langle \rho, \sigma | \ldots \rangle$`]`, donc

(7) $$\left\{ \begin{array}{rcl} (\mathfrak{S}_{\mathrm{ab}}^{+\wedge})_2 & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \\ \rho & \longmapsto & 0 \\ \sigma & \longmapsto & 1\ , \end{array} \right.$$

cet isomorphisme correspond au caractère $\mathfrak{S}^{+\wedge} \longrightarrow \{\pm 1\}$, qui s'obtient aussi comme composé

(8) $$\begin{tikzcd} \mathfrak{S}^{+\wedge} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{sg}"] & \underset{\substack{\text{groupe}\\ \text{symétrique}\\ \text{à trois}\\ \text{lettres}}}{\mathfrak{S}_3} = \underset{\substack{\text{image}\\ \text{inverse}\\ \text{de } \pi_{0,3}^\wedge\\ \text{dans } \mathfrak{S}^{+\wedge}}}{\mathfrak{S}^{+\wedge}/\pi^\wedge} \arrow[r, "\substack{\text{signature}\\ \text{d'une permutation}}"] & \{\pm 1\} \end{tikzcd}$$

---

[65] On a posé

$$\begin{array}{rcccl} \mathfrak{S} & = & \mathcal{T}_{1,1} & \simeq & \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}) \\ \mathfrak{S}^\wedge & = & \mathcal{T}_{1,1}^\wedge & \simeq & \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})^\wedge \\ \mathfrak{S}^+ & = & \mathcal{T}_{1,1}^+ & = & \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}) \\ \mathfrak{S}^{+\wedge} & = & & & \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^\wedge\ . \end{array}$$

`[Grothendieck écrit soit` $\hat{\mathfrak{S}}^+$, `soit` $\mathfrak{S}^{+\wedge}$ `pour le même groupe. Nous écrivons toujours` $\mathfrak{S}^{+\wedge}$, `et de même pour` $\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge}$. `Similairement pour` $\hat{\pi} = \pi^\wedge$ `etc.]`

Ainsi le seul élément θ différent de 1 du noyau de (4) est donné par

$$\theta \;:\; x \longmapsto x \cdot \mathrm{sg}(x)\;. \tag{9}$$

On notera, en posant

$$L_0^{\mathfrak{S}} \;=\; \varepsilon_0^{\hat{\mathbf{Z}}}\;, \qquad L_0^{\pi} \;=\; L_0^{\mathfrak{S}} \cap \pi \;=\; l_0^{\hat{\mathbf{Z}}}\;, \tag{10}$$

que le sous-groupe $\theta(L_0^{\mathfrak{S}}) \subseteq \mathfrak{S}^{+\wedge}$ n'est *pas* $\mathfrak{S}$-conjugué à L_0, il est engendré par

$$\theta(\varepsilon_0) \;=\; -\varepsilon_0 \qquad (\text{car } \varepsilon_0 = \sigma\rho,\ \mathrm{sg}(\varepsilon_0) = -1)\;, \tag{11}$$

et on vérifie que ε_0 n'est pas conjugué à $(-\varepsilon_0)^{\mu} = -\varepsilon_0^{\mu}$ pour quelque $\mu \in \hat{\mathbf{Z}}^*$ (car on voit

`[page 591]`

tout de suite, en passant à $\mathfrak{S}_{\mathrm{ab}}^{\wedge}/\pi_{0,3\ \mathrm{ab}}^{\wedge}$ et notant que $l_0 = \varepsilon_0^2$ serait conjugué à $(-\varepsilon_0^{\mu})^2 = l_0^{\mu}$, qu'on doit avoir $\mu = 1$, or ε_0 et $-\varepsilon_0$ ne sont pas conjugués même dans $\mathrm{SL}(2, \hat{\mathbf{Z}})' \ldots$). Or on va s'intéresser justement aux automorphismes de $\mathfrak{S}^{+\wedge}$ qui transforment $L_0^{\mathfrak{S}}$ en un sous-groupe conjugué. On notera que par contre

$$\theta(l_0) \;=\; l_0\;, \qquad \text{donc } \theta(L_0^{\pi}) = L_0^{\pi}\;. \tag{12}$$

Proposition. *L'homomorphisme* (3)

$$\mathcal{M}_{0,3}^{\sim} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^{+\wedge})$$

est injectif, et son image est formée des automorphismes u de $\mathfrak{S}^{+\wedge}$ qui satisfont les deux conditions suivantes.

a) *u stabilise* $\pi = \mathfrak{S}^{+\wedge}[2] = \mathrm{Ker}(\mathfrak{S}^{+\wedge} \longrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}))$.

b) *u transforme $L_0^{\mathfrak{S}}$ en un sous-groupe de $\mathfrak{S}^{+\wedge}$ $\mathfrak{S}^{+\wedge}$-conjugué de L_0, i.e. il existe $\mu \in \hat{\mathbf{Z}}^*$ et $f_0 \in \mathfrak{S}^{+\wedge}$ tels qu'on ait*

$$u(\varepsilon_0) \;=\; \mathrm{int}(f_0^{-1})(\varepsilon_0^{\mu})\;. \tag{13}$$

Démonstration. L'injectivité a déjà été vue. Montrons que les conditions a) b) sont nécessaires pour que u provienne d'un $u_0 \in \mathcal{M}_{0,3}^{\sim}$. Pour a) c'est trivial, puisque u_0 stabilise $\pi_{0,3}^{\sim}$, donc son image inverse dans $\mathfrak{S}^{+\wedge}$. Pour la condition b), on est ramené au cas où $u_0 \in \mathcal{M}_{0,3}^{\sim}[0]$ (quitte à conjuguer par un élément de $\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} \simeq \mathfrak{S}^{+\wedge}/\pm 1$), dans ce cas on a par construction de $\mathcal{N}_{1,1}^{\sim}$ à partir de $\mathcal{M}_{0,3}^{\sim}$ (cf. III, page 665 ...)

$$u_0(\varepsilon_0) \;=\; \varepsilon_0^{\mu}\;, \tag{14}$$

où $\mu_0 \in \hat{\mathbf{Z}}^*$ est le multiplicateur, OK.

Inversement, soit u un automorphisme de $\mathfrak{S}^{+\wedge}$ qui satisfait a), b), considérons l'automorphisme $\tilde{u}$ de $\mathfrak{S}^{+\wedge}/\pm 1 \simeq \mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge}$ qu'il induit. On voit donc que $\tilde{u}(\pi_{0,3}^{\wedge}) = \pi_{0,3}^{\wedge}$, et que $\tilde{u}(\varepsilon_0)$ est $\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge}$-conjugué à un ε_0^{μ} ($\mu \in \hat{\mathbf{Z}}^*$). Donc par définition, on a $\tilde{u} \in \mathcal{M}_{0,3}^{\sim}$ (cf. page 390 ff.). Soit u' l'automorphisme de $\mathfrak{S}^{+\wedge}$ induit par $\tilde{u}$ (via (3)) – alors u' et u induisent le même automorphisme de $\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} = \mathfrak{S}^{+\wedge}/\{\pm 1\}$, donc on aura $u' = u_0\Theta$, où $\Theta = u^{-1}u'$ est un automorphisme qui

1°) induit l'identité sur $\mathfrak{S}^{+\wedge}/\{\pm 1\}$, et

2°) transforme $L_0^{\mathfrak{S}}$ en un sous-groupe conjugué

– on a vu que cela implique $\Theta = 1$, c.q.f.d.

Considérons maintenant la suite exacte

$$(15) \qquad 1 \longrightarrow \pm 1 \longrightarrow \underbrace{\pi}_{=\mathfrak{S}^+[2]} \longrightarrow \pi_{0,3} \longrightarrow 1 \ ,$$

[page 592]

et considérons le scindage donné par

$$(16) \qquad \begin{cases} \pi_{0,3} & \longrightarrow & \pi & = & \mathfrak{S}^+[2] & = & \mathrm{Ker}(\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) \\ l_i & \longmapsto & \lambda_i & \overset{\mathrm{def}}{=} & -l_i \ . \end{cases}$$

Il y a un tel homomorphisme, en vertu de

$$(17) \qquad \begin{cases} (-l_\infty)(-l_1)(-l_0) = 1 \text{ dans } \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}), \text{ i.e.} \\ l_\infty l_1 l_0 \ = \ -1 \ , \end{cases}$$

et il est évident que c'est un scindage. On aura de même un scindage pour $\pi^\wedge$ sur $\pi_{0,3}^\wedge$. On désigne par π_0 l'image de (16), i.e.

$$(18) \qquad \begin{cases} \pi_0 \text{ sous-groupe de } \pi = \mathfrak{S}^+[2] \text{ engendré par} \\ \lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_\infty \ (\text{où } \lambda_i = -l_i) \ , \end{cases}$$

et on a donc un sous-groupe $\pi_0^\wedge$ de $\pi^\wedge$.

Proposition.

a) *Le sous-groupe π_0 de π est d'indice 2, et il est distingué dans $\mathfrak{S}$.*

b) *Le sous-groupe $\pi_0^\wedge$ de $\pi^\wedge$ est d'indice 2 et il est distingué dans $\mathcal{M}$ – ou, ce qui revient au même, stable sous l'action de $\mathcal{M}/\pm 1 \simeq \mathcal{M}_{0,3}^\sim$.*

Démonstration. Comme

$$(19) \qquad \begin{cases} \rho(\lambda_i) & = & \lambda_{i+1} \\ \sigma(\lambda_0) & = & \lambda_1 \ , & \sigma(\lambda_1) & = & \lambda_0 \ , & \sigma(\lambda_\infty) & = & \sigma(\lambda_1\lambda_0)^{-1} & = & \lambda_1^{-1}\lambda_0^{-1} \\ \tau(\lambda_0) & = & \lambda_0^{-1} \ , & \tau(\lambda_1) & = & \lambda_1^{-1} \ , & \tau(\lambda_\infty) & = & \tau(\lambda_1\lambda_0)^{-1} & = & \lambda_0\lambda_1 \ , \end{cases}$$

on voit que π_0 est normalisé par ρ, σ, τ, donc par $\mathfrak{S}$. Qu'il soit d'indice 2 est évident. Donc $\pi_0^\wedge$ est d'indice 2 dans $\pi^\wedge$ et normalisé par $\mathfrak{S}^\wedge$. Pour voir qu'il est normalisé par $\mathcal{M}$ tout entier, comme

$$\mathcal{M} \ = \ \mathcal{M}(0) \cdot \mathfrak{S}^{+\wedge} \ ,$$

on est ramené à vérifier qu'il est normalisé par $\mathcal{M}(0) \simeq \mathcal{M}^{\sim}_{0,3}(0)$. Or on aura, pour $u \in \mathcal{M}^{\sim}_{0,3}(0)$,

$$(20) \qquad \begin{cases} u(\rho) &= \operatorname{int}(\alpha)\rho \\ u(\sigma) &= \varepsilon_2 \operatorname{int}(\beta)\sigma \\ u(\varepsilon_0) &= \varepsilon_0^{\mu} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_2 &= \varepsilon_2(\mu) \\ \alpha &\in \pi^{\wedge} \cdot \{1,\tau\} \\ \beta &\in \pi^{\wedge} , \end{cases}$$

d'où

$$(21) \qquad \begin{cases} u(l_0) &= l_0^{\mu} \\ u(-l_0) &= (-l_0)^{\mu} , \end{cases} \qquad \text{i.e. } u(\lambda_0) = \lambda_0^{\mu} \ \ (\text{car } (-1)^{\mu} = -1) ,$$

donc $u(\lambda_0) \in \pi_0^{\wedge}$; il reste à prouver que $u(\lambda_1) \in \pi_0^{\wedge}$, or

$$u(\lambda_1) \;=\; u(\rho(\lambda_0)) \;=\; (\underbrace{u\rho}_{=(\operatorname{int}(\alpha)\rho)u})(\lambda_0) \;=\; \operatorname{int}(\alpha)(\rho)(\underbrace{u(\lambda_0)}_{=\lambda_0^{\mu}}) ,$$

et comme $\pi_0^{\wedge}$ est normalisé par $\mathfrak{S}^{\wedge}$ et en particulier par $\alpha\rho\alpha^{-1}$, on trouve bien $u(\lambda_1) \in \pi_0^{\wedge}$.

Corollaire. *On a*

$$(22) \qquad \begin{cases} \pi &\simeq \pi_0 \times \mu \\ \pi^{\wedge} &\simeq \pi_0^{\wedge} \times \mu , \end{cases}$$

où

$$\mu \;=\; \{\pm 1\} \;=\; \operatorname{Centre}(\mathfrak{S}^{+\wedge}) .$$

C'est trivial, puisqu'on a un scindage de l'extension centrale (15).

`[page 593]`

Soient

$$(23) \qquad \begin{cases} \mu_\tau &= \{1,\tau\} \subseteq \mathfrak{S} , \qquad & D_\tau &= \mu_\tau \times \mu \subseteq \mathfrak{S} , \\ \mu_\sigma &= \{1,\sigma\} \subseteq \mathfrak{S} , \qquad & D_\sigma &= \mu_\sigma \times \mu \subseteq \mathfrak{S} , \end{cases}$$

de sorte que l'on a

$$(24) \qquad \begin{matrix} D_\tau \cap \mathfrak{S} &=& D_\tau \cap \pi &=& \mu & \qquad D_\tau \cap \pi_0 &=& \{1\} \\ D_\sigma \cap \mathfrak{S} &=& D_\sigma \cap \pi &=& \mu & \qquad D_\sigma \cap \pi_0 &=& \{1\} \end{matrix} \qquad ({}^{66}) .$$

On pose

$$(25) \qquad \begin{cases} \pi_\tau &= \mu_\tau \cdot \pi = D_\tau \cdot \pi_0 , \qquad & \pi_{0\,\tau} &= \mu_\tau \cdot \pi_0 , \\ \pi_\sigma &= \mu_\sigma \cdot \pi = D_\sigma \cdot \pi_0 , \qquad & \pi_{0\,\sigma} &= \mu_\sigma \cdot \pi_0 , \end{cases}$$

[66] Itou en remplaçant $\mathfrak{S}$, π par $\mathfrak{S}^{\wedge}$, $\pi^{\wedge}$.

de sorte que l'on a

$$
(26) \qquad \begin{cases} \pi_\tau &= \pi_{0\,\tau} \times \mu \ , \\ \pi_\sigma &= \pi_{0\,\sigma} \times \mu \ , \end{cases}
$$

et itou en mettant des ^.

Normalisation de α, β. Les relations (20) ne déterminent α, β que 'modulo signe'. On lève cette ambiguité en prenant

$$
(27) \qquad \alpha \in \pi_{0\,\tau} \ , \qquad \beta \in \pi_0 \ .
$$

Le groupe $\mathfrak{S}/\pi_0$. Il est décrit par générateurs ρ, σ, τ et relations

$$
(28) \qquad \begin{cases} \rho^6 = \sigma^4 = \tau^2 = 1 \ , \qquad \rho^3 = \sigma^2 \ , \\ \tau(\rho) = \sigma(\rho^{-1}) \ , \qquad \tau(\sigma) = \sigma^{-1} \ , \\ \tau(\rho) = \rho \ , \end{cases}
$$

car on a

$$
(29) \qquad \tau(\rho) = (-l_1^{-1})\rho \ ,
$$

donc la dernière relation (28) s'écrit $-l_1^{-1} = 1$, i.e. $\lambda_1 = 1$, et implique $\lambda_\infty = \lambda_0 = 1$ (en appliquant ρ). En termes de ρ, σ, τ', on trouve de même

$$
(30) \qquad \begin{cases} \rho^6 = \sigma^4 = \tau'^2 = 1 \ , \qquad \rho^3 = \sigma^2 \ , \\ \tau'(\rho) = \rho^{-1} \ , \qquad \tau'(\sigma) = \sigma^{-1} \ , \\ \sigma(\rho) = \rho^{-1} \ . \end{cases}
$$

Le sous-groupe $\mathfrak{S}^+/\pi_0$ a la présentation en ρ, σ

$$
(31) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho^6 = \sigma^4 = 1 \ , \qquad \rho^3 = \sigma^2 \ , \\ \sigma(\rho) = \rho^{-1} \end{array} \right\} .
$$

Quelle est l'opération de $\mathcal{M}_{0,3}^{\sim} \simeq \mathcal{M}/\pm 1$ sur $\mathfrak{S}^+/\pi_0$? On a une structure d'extension

$$
(32) \qquad 1 \longrightarrow \underbrace{\mu}_{=\pm 1} \longrightarrow \mathfrak{S}^+/\pi_0 \longrightarrow \underbrace{\mathfrak{S}^+/\pi}_{\simeq \mathfrak{S}_3} \longrightarrow 1 \ ,
$$

et les automorphismes en question conservent cette structure d'extension. Les éléments de $\mathcal{M}^!{}_{0,3}^{\sim} \simeq \mathcal{M}^!/\{\pm 1\}$ opèrent en induisant l'identité dans le quotient $\mathfrak{S}_3$, et bien sûr aussi dans μ – or un tel automorphisme de l'extension correspond à un homomorphisme

$$
(33) \qquad \mathfrak{S}_3 \longrightarrow \underbrace{\mu}_{\pm 1} \ , \qquad \text{i.e.} \quad \mathfrak{S}_{3\ \mathrm{ab}} \longrightarrow \mu \ ,
$$

or

$$
\mathfrak{S}_{3\ \mathrm{ab}} \xrightarrow{\mathrm{sg}} \{\pm 1\} = \mu \ ,
$$

donc le groupe des automorphismes de $\mathfrak{S}^+/\pi_0$ induisant l'identité dans $\mathfrak{S}_3$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, son générateur est donné par

$$(34) \qquad \theta(x) \; = \; \mathrm{sg}(x)\cdot x \; , \qquad \text{donc} \; \begin{cases} \theta(\rho) & = \; \rho \\ \theta(\sigma) & = \; -\sigma \; . \end{cases}$$

`[page 594]`

Composant avec les formules (20), on trouve

$$(35) \qquad u|_{\mathfrak{S}^{+\wedge}/\pi_0^\wedge} \; = \; \theta^{\varepsilon_2(u)} \; : \begin{cases} \dot\rho & \longmapsto \; \dot\rho \\ \dot\sigma & \longmapsto \; \varepsilon_2(u)\dot\sigma \end{cases} ,$$

i.e.

$$(35 \text{ bis}) \qquad \underbrace{[\dot u, \dot\sigma]}_{=\dot u(\dot\sigma)\dot\sigma^{-1}} \; = \; \varepsilon_2(u)^{\dot{}} \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{S}/\pi_0 \qquad (^{67}) \; .$$

Reprenons la définition

$$(36) \qquad Z \; = \; Z_{\rho,\sigma} \; \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^{+\wedge}) \;\middle|\; \begin{array}{l} u(L_\rho) \;\; \mathfrak{S}^{+\wedge}\text{-conjugué à } L_\rho \\ u(L_\sigma) \;\; \mathfrak{S}^{+\wedge}\text{-conjugué à } L_\sigma \\ u(L_0) \; = \; L_0 \end{array} \right\} ,$$

de sorte qu'on aura, pour $u \in Z$,

$$(37) \qquad \begin{cases} u(\rho) \;\; \mathfrak{S}\text{-conjugué à } \rho^{\varepsilon'} \\ u(\sigma) \;\; \mathfrak{S}\text{-conjugué à } \sigma^{\varepsilon} \; (= \varepsilon\sigma) \\ u(\varepsilon_0) \; = \; \varepsilon_0^\mu \; , \end{cases}$$

avec $\mu \in \hat{\mathbf{Z}}^*$ et $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$ bien déterminés (car $\begin{cases} \hat{\mathbf{Z}} & \longrightarrow \; \mathfrak{S} \\ n & \longmapsto \; \varepsilon_0^n \end{cases}$ est injectif, ρ et ρ^{-1} ne sont pas $\mathfrak{S}^{+\wedge}$-conjugués, ni σ et σ^{-1}). Je dis qu'un tel u provient de $\mathcal{M}_{0,3}^{\sim}$ – il reste à vérifier, en vertu de la proposition, que u stabilise $\pi^\wedge$, qui est engendré par l_0, l_1, l_∞. Or on aura

$$u(l_0) \; = \; l_0^\mu \; \in \; \pi^\wedge$$

et

$$u(h) \; = \; \underbrace{u\rho}_{\begin{cases} = \mathrm{int}(f)(\rho^{\varepsilon'})(u) \\ f \in \mathfrak{S}^{+\wedge} \end{cases}}(l_0) \; = \; \mathrm{int}(f)(\rho^{\varepsilon'})(u(l_0)) \; = \; \mathrm{int}(f)(\rho^{\varepsilon'})(l_0^\mu) \; ,$$

[67] Cela s'écrit aussi $[\dot u, \dot x] = \mathrm{sg}(x)^{\nu_2(u)}$ dans $\mathfrak{S}^{+\wedge}/\pi_0$ ($u \in \mathcal{M}^!$, $x \in \mathfrak{S}^{+\wedge}$) (attention, ça foire si on ne suppose pas $u \in \mathcal{M}^!$, seulement $u \in \mathcal{M}$ ...).

or $\mathfrak{S}^\wedge$ et a fortiori $\mathrm{int}(f)(\rho^{\varepsilon'})$ normalisent $\pi^\wedge$, donc

$$u(l_1) \;\in\; \pi^\wedge \;,$$

et comme

$$u(-1) \;=\; -1 \;, \qquad \text{d'où} \qquad u(l_\infty) \;=\; -u(l_1 l_0)^{-1} \;=\; -u(l_0)^{-1}u(l_1)^{-1} \;,$$

on a aussi $u(l_\infty) \in \pi^\wedge$, OK.

Si on identifie u à un élément de $\mathcal{M}_{0,3}^{\sim}$, on voit qu'en fait

$$u \;\in\; \mathcal{M}_{0,3}^{\sim} \;\simeq\; \mathcal{M}^![0] \;\subseteq\; \mathcal{M} \qquad ({}^{68}) \;,$$

et on aura donc (20), de façon plus précise,

$$(38) \qquad \begin{cases} u(\rho) &=& \mathrm{int}(\alpha)\rho \\ u(\sigma) &=& \varepsilon_2\,\mathrm{int}(\beta)\sigma \\ u(\varepsilon_0) &=& \varepsilon_0^\mu \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \alpha \;\in\; \pi_{0\tau}^\wedge \;, \qquad & \beta \;\in \pi_0^\wedge \\ \mu \;\in\; \hat{\mathbf{Z}}^* \;, \end{cases}$$

qui à leur tour impliquent (37). En fait, les formules (38) pour $u(\rho)$, $u(\sigma)$, $u(\varepsilon_0)$ déterminent de façon unique $\mu \in \hat{\mathbf{Z}}^*$, $\varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$, $\alpha \in \pi_{0\tau}^\wedge$, $\beta \in \pi_0^\wedge$, et on aura nécessairement alors

$$(39) \qquad \varepsilon_2 \;=\; \varepsilon_2(\mu) \;, \qquad \varepsilon_\tau \;=\; \varepsilon_3(\mu) \;, \qquad [\varepsilon_3 = ?]$$

où ε_τ est l'homomorphisme qui intervient dans la suite exacte

$$(40) \qquad 1 \longrightarrow \pi_0^\wedge \longrightarrow \pi_{0,\tau}^\wedge \xrightarrow{\varepsilon_\tau} \{\pm 1\} \longrightarrow 1 \;.$$

Ainsi on a prouvé :

Proposition. *Dans le cas universel ($\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{+\wedge}$), on a $Z^!_{\rho,\sigma} \xleftarrow{\sim} \mathcal{M}^![0] \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{M}^!_{0,3}{}^{\sim}[0]$, les composants u, μ, ε', ε d'un élément de $Z^!_{\rho,\sigma}$ correspondant respectivement (en termes de $u_0 \in \mathcal{M}[0]$) à u_0 (identifié à un élément de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^{+\wedge})$), $\mu = \chi(u_0)$ (le multiplicateur de u_0), $\varepsilon = \varepsilon_3(\mu)$, $\varepsilon' = \varepsilon_2(\mu)$.*

Corollaire. *On a $G_{\rho,\sigma} \simeq \mathcal{M} = \mathcal{N}_{1,1}^{\sim}$, $\Upsilon_{\rho,\sigma} \simeq \mathcal{M}/\mathfrak{S}^{+\wedge} = \mathcal{N}_{1,1}^{\sim}/\mathfrak{S}^{+\wedge} \simeq \mathcal{M}_{0,3}^{\sim}/\mathfrak{S}_{0,3}^{+\wedge} \simeq \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim}$.*

`[page 595]`

Remarque. Il est tentant d'écrire les deux premières relations (38) sous la forme

$$(41) \qquad \begin{cases} (\alpha^{-1}u)(\rho) &=& \rho \;, & \text{i.e.} & \alpha^{-1}u \;\in\; Z_\rho \;, \\ (\beta^{-1}u)(\sigma) &=& \varepsilon_2\sigma \;, & \text{soit} & \beta^{-1}u \;\in\; \mathcal{N}'_\sigma \;, \end{cases}$$

et d'introduire alors

$$(42) \qquad \begin{cases} a \;=\; \alpha^{-1}u \;\in\; Z_\rho \;, & \text{donc} \quad u \;=\; \alpha a \;, \quad \alpha \;=\; ua^{-1} \;, \\ b \;=\; \beta^{-1}u \;\in\; \mathcal{N}_\sigma \;, & \text{donc} \quad u \;=\; \beta b \;, \quad \beta \;=\; ub^{-1} \;, \end{cases}$$

[68] Attention, on n'avait pas introduit précédemment $\mathcal{M}_{0,3}^{\sim}[0]$, mais seulement $\mathcal{M}^!_{0,3}{}^{\sim}[0] \subseteq \mathcal{M}^!_{0,3}{}^{\sim}$. Or il n'est pas vrai que l'on aurait $u \in \mathcal{M}^!_{0,3}{}^{\sim}$, p.ex. on peut avoir $u = \varepsilon_0$. L'image de u dans $\mathfrak{S}_3$ est dans $\{1, \sigma_0\}$, donc en corrigeant au besoin par ε_0, on aura un élément de $\mathcal{M}^!_{0,3}{}^{\sim}[0]$. Cf. rectification plus détaillée p. 609 ff. On va noter $Z^!_{\rho,\sigma} = \mathcal{M}^![0] = Z_{\rho,\sigma} \cap \mathcal{M}^!$.

et les développements du §48 (notamment XI) peuvent faire s'attendre que les quantités a, b, pour $u \in \mathcal{M}[0]$ variable, dépendent *multiplicativement* de u. Nous allons voir cependant qu'il n'en est rien. Soit en effet

$$\delta \ : \ G_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \ \simeq \ \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim}$$

l'homomorphisme canonique, de sorte que l'on aura

(43) $$\delta(u) \ = \ \delta(b) \ = \ \tau_{\Upsilon}^{\nu_3}\delta(a) \ ,$$

en posant

$$\tau_{\Upsilon} \ = \ \delta(\tau) \ , \qquad \varepsilon_3 = (-1)^{\nu_3} \qquad (\ \nu_3 \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \ ) \ .$$

Si u' correspond à b', a', ν_3', on aura de même

(43 bis) $$\delta(u') \ = \ \delta(b') \ = \ \tau_{\Upsilon}^{\nu_3'}\delta(a') \ ,$$

et si $u'' = u'u$ correspond à a'', b'', ν_3'',

(43 ter) $$\delta(u'u) \ = \ \delta(b'') \ = \ \tau_{\Upsilon}^{\nu_3''}\delta(a'') \ .$$

En fait, on aura

(44) $$\begin{array}{c} b'' \ = \ b'b \ , \ \ \nu_2'' \ = \ \nu_2' + \nu_2 \ \text{ et } \ \nu_3'' \ = \ \nu_3' + \nu_3 \\ (\text{i.e. } \ \varepsilon_2'' \ = \ \varepsilon_2'\varepsilon_2 \qquad \text{et} \ \ \varepsilon_3'' \ = \ \varepsilon_3'\varepsilon_3 \qquad) \ . \end{array}$$

On a en u

$$\begin{aligned} u(\sigma) \ &= \ \varepsilon_2 \operatorname{int}(\beta)\sigma \\ u'(\sigma) \ &= \ \varepsilon_2' \operatorname{int}(\beta')\sigma \ , \end{aligned}$$

d'où

$$(u'u)(\sigma) \ = \ u'(u(\sigma)) \ = \ \varepsilon_2 \operatorname{int}(u'(\beta))u'(\sigma) \ = \ \varepsilon_2\varepsilon_2' \operatorname{int}(u'(\beta)\beta')\sigma$$

avec $u'(\beta)\beta' \in \pi_0^{\wedge}$, ce qui par l'unicité prouve

(45) $$\beta'' \ = \ u'(\beta)\beta' \ , \qquad \varepsilon_2'' \ = \ \varepsilon_2'\varepsilon_2 \ ,$$

d'où on conclut bien

$$\underbrace{b''}_{= \beta''^{-1}u'' = \beta''^{-1}(u'u)} \ = \ \underbrace{b'}_{= \beta'^{-1}u'} \cdot \underbrace{b}_{= \beta' u} \ ,$$

i.e. $\beta''^{-1}u'u = \beta'^{-1}u'\beta^{-1}u$, i.e. $\beta''^{-1} \ = \ \beta'^{-1}u'(\beta^{-1})$, i.e. $\beta'' = u'(\beta)\beta'$, qui n'est autre que (45). La relation $\varepsilon_3'' = \varepsilon_3'\varepsilon_3$ est aussi évidente, p.ex. sur la relation (qui caractérise ε_3 et de même ε_3', ε_3'')

(46) $$u(\rho) \ \text{ est } \mathfrak{S}^{+\wedge}\text{-conjugué à } \ \rho^{\varepsilon_3} \ .$$

Il reste donc à examiner la relation hypothétique

$$a'' \ = \ a'a \ ,$$

qui implique

(*) $$\delta(a'') = \delta(a')\delta(a) \ ,$$

mais comparant (43), (43 bis), (43 ter), on trouve la relation

$$\underbrace{\delta(u')\delta(u)}_{=\delta(u'u)=\tau_\Upsilon^{\nu_3''}\delta(a'')} \;=\; \tau_\Upsilon^{\nu_3'}\delta(a')\tau_\Upsilon^{\nu_3}\delta(a)\;,$$

[page 596]

[i.e.]

$$\tau_\Upsilon^{\nu_3'+\nu_3}\delta(a'') \;=\; \tau_\Upsilon^{\nu_3'}\delta(a')\tau_\Upsilon^{\nu_3}\delta(a)\;,$$

ou encore

$$\delta(a'') \;=\; \tau_\Upsilon^{\nu_3}\delta(a')\tau_\Upsilon^{\nu_3}\delta(a)\;,$$

i.e.

(47) $$\delta(a'') \;=\; \tau_\Upsilon^{\nu_3}(\delta(a'))\delta(a)\;.$$

Donc la relation $(*)$ équivaut à

(48) $$\delta(a') \;=\; \tau_\Upsilon^{\nu_3}(\delta(a'))\;,\;\; \text{i.e. } [\delta(a'),\tau_\Upsilon^{\nu_3}] \;=\; 1\;,\;\; \text{i.e. } [\delta(u'),\tau_\Upsilon^{\nu_3}] \;=\; 1 \qquad ([69])\;.$$

Cela montre que si $\nu_3 = 1$, i.e. $\varepsilon_3 = -1$, alors la relation $(*)$ équivaut à la *commutativité de* $\delta(u')$ *avec* τ_Υ. C'est une condition draconienne sur un élément de $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim}$ qui, pour un élément de $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}$ lui-même tout au moins, implique que $u' \in \{1, \tau_\Upsilon\}$ – et par des arguments heuristiques, on a vu qu'il devait même en être ainsi pour tout élément de $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim}$. Il apparaît que le succès de la présentation du §48 XI tient au fait que dans la situation envisagée dans ce cas, le groupe $\Upsilon_{\rho,\sigma} \simeq \hat{\mathbf{Z}}^*$ était *commutatif,* donc τ_Υ *central.* En dehors de ce cas, la quantité $a = \alpha^{-1}u \in Z_\rho \hookrightarrow G_{\rho,\sigma}$ dépend multiplicativement de l'élément $u \in \mathcal{M}^![0]$, seulement à condition de se borner à des $u \in \mathcal{M}^![0]'$.

Nous allons essayer de sauver la mise, en trouvant un *homomorphisme* canonique

$$\underbrace{\mathcal{M}^![0]}_{=Z^!_{\rho,\sigma}} \longrightarrow \underbrace{Z^!_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^*_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^*_\sigma}_{=S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma} \underset{\text{indice } 2}{\subseteq} S_0\Gamma_{\rho,\sigma}} \qquad ([70])\;.$$

Notons que le deuxième membre est formé des triples

(49) $$\{(\underbrace{u}_{\in\mathcal{M}[0]},\underbrace{a}_{\in\mathcal{N}'_\rho},\underbrace{b}_{\in\mathcal{N}'_\sigma}) \mid u = fb = f'a, \text{ avec } f,\, f' \in \mathfrak{S}^{+\wedge} \text{ convenables}\} \qquad ([71])\;,$$

et pour un tel triple, on aura

(49 bis) $$\begin{cases} u(\sigma) \;=\; \mathrm{int}(fb)(\sigma) \;=\; \mathrm{int}(f)\underbrace{\mathrm{int}(b)(\sigma)}_{=\varepsilon_2(b)(\sigma)} \;=\; \varepsilon_2(u)\,\mathrm{int}(f)(\sigma) \\ u(\rho) \;=\; \mathrm{int}(f')(\rho^{\varepsilon_3(u)}) \;=\; \mathrm{int}(f')\varepsilon_3(\tau')(\rho) \;=\; \mathrm{int}(f'\varepsilon_3(\tau'))(\rho)\;, \end{cases}$$

[69] Puisque $\delta(u) = \tau_\Upsilon^{\nu_3}\delta(a)$.

[70] **NB** On a $S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}/L_0^\pi \xrightarrow{\sim} S_0\Gamma_{\rho,\sigma}/L_0^{\mathfrak{S}} \overset{\text{def}}{=} \Upsilon_{\rho,\sigma} \simeq \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim}$.

[71] Ce qui implique

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(u) &= \varepsilon_\sigma(b) \\ \varepsilon_3(u) &= \varepsilon_\rho(a) \end{aligned}$$

où on pose

$$\varepsilon_3(\tau') \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \varepsilon_3 = +1 \\ \tau' & \text{si} \quad \varepsilon_3 = -1 \end{cases}, \qquad \text{i.e. } \varepsilon_3(\tau') = \sigma^{\nu_3} \text{ si } \varepsilon_3 = (-1)^{\nu_3} .$$

Si u correspond à α, β (cf. (38)), les formules (49 bis) s'écrivent aussi respectivement

$$\begin{cases} \operatorname{int}(f)(\sigma) = \operatorname{int}(\beta)(\sigma) , & \text{i.e.} \quad f = \beta\sigma^i \quad (i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \\ \operatorname{int}(f'\varepsilon_3(\tau'))(\rho) = \operatorname{int}(\alpha)(\rho) , & \text{i.e.} \quad f'\varepsilon_3(\tau') = \alpha\rho^j \quad (j \in \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) . \end{cases}$$

Donc on trouve :

Proposition. *Pour un $u \in Z^!_{\rho,\sigma} = \mathcal{M}^![0] \simeq \mathcal{M}^{\sim}_{0,3}$ fixé, les $(u,a,b) \in S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$ au dessus de u sont exactement les éléments de*

$$(50) \qquad \left\{ (u,a,b) \;\middle|\; \begin{array}{lllll} a = f'^{-1}u & \text{avec} & f' = \alpha\rho^j\varepsilon_3(\tau') & (j \in \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \\ b = f^{-1}u & \text{avec} & f = \beta\sigma^i & (i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \end{array} \right\} \qquad ({}^{72}) .$$

Considérons alors l'élément (u,a,b) au dessus de u ayant l'expression la plus simple en termes de α, β, en prenant $i = 0$, $j = 0$, correspondant donc aux choix :

[page 597]

$$(51) \qquad \begin{cases} a = \varepsilon_3(\tau')\alpha^{-1}u , & \text{i.e.} \quad \alpha = ua^{-1}\varepsilon_3(\tau') \\ b = \beta^{-1}u , & \text{i.e.} \quad \beta = ub^{-1} ; \end{cases}$$

je me demande si cette section ensembliste de $S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}$ au dessus de $Z^!_{\rho,\sigma} = \mathcal{M}^![0]$ est multiplicative, ou, ce qui revient au même, si a et b définis par (51) dépendent multiplicativement de u.

Proposition *Soit $(u,a,b) \in S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}$ (cf. (50)). Pour qu'on ait $i = 0$, $j = 0$, i.e. pour qu'on ait (51) – i.e. pour que (u,a,b) appartienne à la section ensembliste précédente, il faut et il suffit qu'on ait les relations*

$$(52) \qquad u \equiv b \equiv \varepsilon_3(\sigma)a \mod \pi_0^\wedge \qquad ({}^{73}) .$$

DÉMONSTRATION. Comme $\rho = ub^{-1}$ et $\alpha\varepsilon_3(\sigma) = u\sigma^{-1}\varepsilon_3(\tau') = ua^{-1}\varepsilon_3(\sigma^{-1})$ ([74]) sont tous deux dans π_0, la condition est nécessaire. Pour la suffisance, on note que (52) s'écrit, avec les notations de (50), donc $f = ub^{-1}$, $f' = ua^{-1}$, i.e. $f'\varepsilon_3(\sigma^{-1}) = ua^{-1}\varepsilon_3(\sigma^{-1})$,

$$(53) \qquad f , \quad f'\varepsilon_3(\sigma^{-1}) \in \pi_0 ,$$

[72] où α, β, ε_2, ε_3 sont définis par u via (38).

[73] Où on a posé

$$\varepsilon_3(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \varepsilon_3 = +1 \\ \sigma & \text{si} \quad \varepsilon_3 = -1 . \end{cases}$$

[74] **NB** $\tau'\tau = \sigma^{-1}$, $\tau'\sigma^{-1} = \tau$.

et réduisant modulo $\pi_0^\wedge$ dans $\mathfrak{S}^\wedge/\pi_0$ cela s'écrit $\dot\beta\dot\sigma^i = 1$ et $\dot\alpha\dot\rho^j\varepsilon_3(\tau'\sigma^{-1})^\cdot = 1$, cette dernière relation s'écrit aussi $\dot\alpha(\dot\rho)\varepsilon_3(\tau)^\cdot = 1$, i.e. $\varepsilon_3(\dot\tau)\dot\alpha\dot\rho^j = 1$, or $\varepsilon_3(\dot\tau)\dot\alpha = 1$, la condition [1mm]

$$\dot\sigma^i = \dot\rho^j = 1\,, \qquad \text{i.e.} \qquad i = 0\,,\ j = 0\,,$$

c.q.f.d.

Soient maintenant u, correspondant à a, b, ε_3, et u', correspondant à a', b', ε'_3, soit $u'' = u'u$, correspondant à a'', $b'' = b'b$ et $\varepsilon''_3 = \varepsilon'_3\varepsilon_3$, de sorte qu'on aura

$$\begin{aligned} u &\equiv \varepsilon_3(\sigma)a \quad (\pi_0^\wedge)\\ u' &\equiv \varepsilon'_3(\sigma)a' \quad (\pi_0^\wedge)\\ \underbrace{u''}_{=\underbrace{u'u}_{\equiv(\varepsilon'_3(\sigma)a')(\varepsilon_3(\sigma)a)}} &\equiv \varepsilon''_3(\sigma)a'' \quad (\pi_0^\wedge)\,, \end{aligned}$$

$= \varepsilon\cdot\varepsilon'_3(\sigma)\cdot\varepsilon_3(\sigma)\cdot a''$, où $\varepsilon\in\{\pm1\}$, $\varepsilon=-1$ si et seulement si $\varepsilon_3=-1$ *et* $\varepsilon'_3=-1$

ce qui donne

$$a'\varepsilon_3(\sigma)a \equiv \varepsilon\varepsilon_3(\sigma)a'' \qquad (\pi_0^\wedge)\,,$$

i.e.

(53) $$a'' \equiv \varepsilon\varepsilon_3(\sigma)(a')\cdot a \qquad$$ ([75]), [[76]] .

Donc la relation escomptée

$$a'' = a'a\,, \qquad \text{équivalente à} \qquad a'' \equiv a'a \quad (\pi_0^\wedge)\,,$$

est vraie si et seulement si on a

[page 598]

(54)

$$\varepsilon_3(\sigma)(a') \equiv \varepsilon a' \quad (\pi_0^\wedge)\,, \qquad \text{où} \quad \begin{cases} \varepsilon\in\{\pm1\}\,,\ \ \varepsilon \overset{\text{def}}{=} -1 \text{ si et seulement si } \varepsilon_3=\varepsilon'_3=-1\\ \varepsilon_3(\sigma) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_3 = +1\\ \sigma & \text{si } \varepsilon_3 = -1\,. \end{cases}\end{cases}$$

Cette condition (54) s'explicite suivant les cas :

(55) $$\begin{cases} \text{a)} \ \text{si } \varepsilon_3 = 1, \text{ alors } \varepsilon = 1 \text{ et (54) [est] toujours vérifiée.}\\ \text{b)} \ \text{si } \varepsilon_3 = -1, \text{ alors (54) s'écrit } \sigma(a') = \varepsilon'_3\cdot a' \quad (\pi_0^\wedge), \text{ i.e.}\\ \qquad [\dot\sigma,\dot a'] = \dot\varepsilon'_3 \ , \qquad \text{où les}\ {}^\cdot\ \text{désignent les classes dans } \mathcal{M}/\pi_0^\wedge. \end{cases}$$

Comme on a $a' \equiv \varepsilon'_3(\sigma)^{-1}u' = \begin{cases} u' & \text{si } \varepsilon'_3 = 1\\ \sigma^{-1}u' & \text{si } \varepsilon'_3 = -1\end{cases}$, on trouve que la condition (55 b) équivaut aussi à

(56) $$\begin{cases} \dot\sigma(\dot u') = \varepsilon'_3 u' \quad \text{dans } \mathcal{M}/\pi_0^\wedge, \text{ i.e.}\\ [\dot\sigma,\dot u'] = \varepsilon'_3 \end{cases}$$

[75] NB $\varepsilon_3(\sigma)$ et $\varepsilon_3(\sigma^{-1})$ opèrent de la même façon car $\sigma^{-1} = -\sigma$.

[76] [Deux fois (53).]

(équivalence valable aussi bien pour $\varepsilon'_3 = 1$ que $\varepsilon'_3 = -1$). Or on a vu (35) que l'on a dans $\mathfrak{S}^{+\wedge}/\pi_0^\wedge$

$$\dot{u}'(\dot{\sigma}) \ = \ \varepsilon_2(u')\dot{\sigma} \ ,$$

i.e. $[\dot{u}', \dot{\sigma}] = \varepsilon_2(u')$, ou encore

(57) $$[\dot{\sigma}, \dot{u}'] \ = \ \varepsilon_2(u')^{\cdot} \ .$$

Comparant (56) et (57), on voit que (56) prend la forme équivalente

(58) $$\varepsilon_2(u') \ = \ \varepsilon_3(u') \ .$$

On a donc prouvé :

Proposition. *Soient u, u' et $u'' = u'u$ dans $\mathcal{M}^![0] = Z^!_{\rho,\sigma}$, correspondant à $\varepsilon_3 = \varepsilon'_3$, $\varepsilon''_3 = \varepsilon'_3\varepsilon_3$ dans $\{\pm 1\}$, et à $a = \varepsilon_3(\tau')\alpha^{-1}u$, $a' = \varepsilon'_3(\tau')\alpha'^{-1}u'$, $a'' = \underbrace{\varepsilon''_3(\tau')}_{=\varepsilon'_3(\tau')\varepsilon_3(\tau')} \alpha''^{-1} \underbrace{u''}_{u'u}$, avec $a, a', a'' \in \mathcal{N}'_\rho$, $a \equiv \varepsilon_3(\sigma)^{-1}u$, $a' \equiv \dots$, $a'' \equiv \dots$ (π_0) ([77]). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *On a*
$$a'' \ = \ a'a \ .$$

a′) *On a*
$$a'' \ \equiv \ a'a \quad (\pi_0^\wedge) \ .$$

b) *On a* $\varepsilon_3 = 1$, *i.e.* $a(\rho) = \rho$, ou $\sigma(a') = \varepsilon'_3 a' \quad (\pi_0^\wedge)$.

b′) *On a* $\varepsilon_3 = 1$, *i.e.* $a(\rho) = \rho$, ou $a'(\sigma) = \varepsilon'_3\sigma \quad (\pi_0^\wedge)$.

c) *On a* $\varepsilon_3 = 1$, *i.e.* $a(\rho) = \rho$, ou $\sigma(u') = \varepsilon'_3 u' \quad (\pi_0^\wedge)$.

c′) *On a* $\varepsilon_3 = 1$, *i.e.* $a(\rho) = \rho$, ou $u'(\sigma) = \varepsilon'_3\sigma \quad (\pi_0^\wedge)$.

d) *On a* $\boxed{\varepsilon_3 = 1 \text{ ou } \varepsilon'_2 = \varepsilon'_3, \text{ i.e. } \varepsilon'_2\varepsilon'_3 = 1}$.

Corollaire. *Au dessus des deux sous-groupes*

(59) $$\begin{cases} Z^{!'}_{\rho,\sigma} & = & \mathcal{M}^{!'}[0] & \stackrel{\text{def}}{=} & \{u \in Z^!_{\rho,\sigma} \mid \varepsilon_3(u) = 1\} \\ Z^{!'''}_{\rho,\sigma} & = & \mathcal{M}^{!'''}[0] & \stackrel{\text{def}}{=} & \{u \in Z^!_{\rho,\sigma} \mid \varepsilon_2(u) = \varepsilon_3(u)\} \end{cases}$$

l'application section ensembliste

(60) $$\begin{array}{rcl} A \ : \ \underbrace{Z^!_{\rho,\sigma}}_{\simeq \mathcal{M}^![0]} & \longrightarrow & S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma} \\ u & \longmapsto & (u, a = \varepsilon_3(\tau')\alpha^{-1}u, b = \beta^{-1}u) \end{array}$$ ([78])

[77] **NB**

$$\begin{cases} \varepsilon_3 & = & \varepsilon_3(u) & = & \varepsilon_\rho(a) \\ \varepsilon'_3 & = & \varepsilon_3(u') & = & \varepsilon_\rho(a') \\ \varepsilon''_3 & = & \varepsilon_3(u'') & = & \varepsilon_\rho(a'') \ . \end{cases}$$

est une section multiplicative. Mais elle n'est pas multiplicative au dessus de $\mathcal{M}^![0]$ tout entier.

`[page 599]`

Remarque. Les éléments de l'image inverse $S_0\Gamma'^!_{\rho,\sigma}$ de $Z'^!_{\rho,\sigma}$ dans $S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}$ qui appartiennent à la section envisagée sont caractérisés (en vertu de la proposition p. 598) par la relation

$$(61) \qquad u \equiv b \equiv a \mod \pi_0^\wedge \qquad (^{79}) ,$$

qui rend évident que c'est un sous-groupe. Je n'ai pas trouvé de jolie expression analogue pour l'appartenance d'un élément de $S_0\Gamma^{!'''}_{\rho,\sigma}$ (caractérisé par la relation $\varepsilon_2(u)\varepsilon_3(u) = 1$) à la section correspondante.

Proposition. *Soit $S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma} \subseteq S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}$ le sous-ensemble de $S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}$* `[donné par]`

$$(62) \qquad \begin{aligned} & S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma} \\ = & \left\{ (u,a,b) \in \underbrace{Z_{\rho,\sigma}}_{=\mathcal{M}[0]} \times \mathcal{N}_\rho^* \times \mathcal{N}_\sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{lll} u & \equiv & b \qquad (\pi_0^\wedge) \\ u & \equiv & \varepsilon_3(\sigma)a \mod \pi^\wedge = \pi_0^\wedge \times \{\pm 1\} \end{array} \right\} \\ \subseteq & \; S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma} . \end{aligned}$$

Alors :

a) *$S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma}$ est un sous-groupe de $S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}$.*

b) *L'homomorphisme canonique $S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma} \longrightarrow Z^!_{\rho,\sigma} = \mathcal{M}^![0]$, $(u,a,b) \longmapsto u$, est surjectif, et son noyau est le sous-groupe, isomorphe à $\mu = \{\pm 1\}$, des éléments $(1,\varepsilon,1)$ avec $\varepsilon \in \mu = \mathcal{N}'_\rho \cap \pi^\wedge = L_\rho \cap \pi^\wedge$.*

Démonstration. Le fait qu'on a un sous-groupe résulte du calcul déjà fait p. 597, 598, la condition que le produit de deux éléments (u',a',b'), (u,a,b) de $S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma}$ y soit, s'exprimant encore par la formule

$$(56) \qquad [\dot\sigma, \dot u'] = \dot\varepsilon'_3 \quad \textit{dans} \;\; \mathcal{M}/\pi^\wedge \;\; (\text{au lieu de } \mathcal{M}/\pi_0^\wedge) \qquad [^{80}] ,$$

ou encore

$$(56 \text{ bis}) \qquad \underbrace{[\dot u', \dot\sigma]}_{= \dot u'(\dot\sigma)\dot\sigma^{-1} = \dot\varepsilon'_2} = \dot\varepsilon'_3 , \qquad \text{soit } \dot\varepsilon'_3 = \dot\varepsilon'_2 .$$

Or dans $\mathfrak{S}/\pi_0$, les images de ε'_2 et ε'_3 appartiennent toutes deux au sous-groupe central π/π_0, donc ils sont triviaux dans $\mathfrak{S}/\pi$, donc la relation (56 bis) est trivialement satisfaite.

La surjectivité de l'application $S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma} \longrightarrow Z^!_{\rho,\sigma}$ provient du fait que $S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma}$ contient la section ensembliste $A(Z^!_{\rho,\sigma})$ de la proposition p. 597. Le noyau est formé des $(1,a,b)$ avec $a \in \mathcal{N}_\rho^* \cap \pi$, $b \in \mathcal{N}_\sigma^* \cap \pi_0$. Or $\mathcal{N}_\rho^* \cap \mathfrak{S} = L_\rho$, $\mathcal{N}_\sigma^* \cap \mathfrak{S} = L_\sigma$, et

$$(57) \qquad L_\rho \cap \pi^\wedge = L_\sigma \cap \pi^\wedge = \mu , \qquad L_\rho \cap \pi_0^\wedge = L_\sigma \cap \pi_0^\wedge = \{1\} ,$$

[78] Cf. proposition p. 597.
[79] En plus de $\varepsilon_3(u) \equiv 1$, qui caractérise les éléments de $S_0\Gamma'^!_{\rho,\sigma}$.
[80] `[Saut dans la numérotation.]`

[page 600]

d'où la caractérisation du noyau.

Corollaire. *Considérons $S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}$ comme une extension de $Z^!_{\rho,\sigma} = \mathcal{M}^![0]$ par $L_\rho \times L_\sigma \simeq \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, donc (en écrivant $L_\rho \simeq \mu \times L_{-\rho} \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$) une extension de $\underbrace{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}_{=\mu} \times \underbrace{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}}_{=L_{-\rho}} \times \underbrace{\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}}_{L_\sigma}$. Cette extension correspond donc canoniquement à trois extensions, par μ, $L_{-\rho}$, L_σ respectivement. L'extension par $L_{-\rho} \times L_\sigma$ est munie d'une section canonique. Il reste une extension (c'est justement $S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma}$) de $Z^!_{\rho,\sigma}$ par μ.*

Cette extension correspond justement à l'ambiguité de signe pour choisir un $\alpha = \pi^\wedge$ au dessus de $\tilde{\alpha} \in \pi^\wedge/\pm 1$ défini par $u \in Z^!_{\rho,\sigma} = \mathcal{M}^![0]$, qui se reflète par l'ambiguité à choisir le signe pour $a \in \mathcal{N}'_\rho$, lié à α par (51),

$$(58) \qquad a = \varepsilon_3(\tau')\alpha^{-1}u \,, \qquad \alpha = ua^{-1}\varepsilon_3(\tau') \,.$$

Nous avons pu lever cette ambiguité par l'exigence $\alpha \in \pi^\wedge_{0\,\tau} = \{1,\tau\} \times \pi_0^\wedge$, et nous venons de constater que ce choix, pour canonique qu'il soit, n'est pas multiplicatif. En même temps, on trouve l'explicitation complète de α'' (normalisé canoniquement par la condition $\alpha'' \in \pi^\wedge_{0\,\tau}$) associé à $u'' = u'u$, en termes de α' (associé à u') et α (associé à u) également normalisés en termes de a', a. En effet, la proposition p. 598 nous dit dans quels cas exactement on a

$$(59) \qquad a'' = a'a \,,$$

savoir si et seulement si on a

$$(59 \text{ bis}) \qquad \varepsilon_3(u) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_2(u')\varepsilon_3(u') = 1 \,.$$

Mais on sait maintenant qu'en tous cas on doit avoir

$$(60) \qquad a'' = \varepsilon a'a \,, \qquad \varepsilon \in \{\pm 1\} \,,$$

et on trouve maintenant que $\varepsilon = +1$ si et seulement si on est dans le cas (59 bis), [$\varepsilon =$]-1 dans le cas contraire, i.e. si $\varepsilon_3(u) = -1$ et $\varepsilon_2(u')\varepsilon_3(u') = +1$. En résumé :

Corollaire. *Soient $u, u' \in \mathcal{M}^![0]$, d'où $u'' = u'u$, soient $\alpha, \alpha', \alpha'' \in \pi^\wedge_{0\,\tau}$ associés (définis par $u(\rho) = \mathrm{int}(\alpha)\rho$ etc.), et posons*

[page 601]

$$(61) \qquad a = \varepsilon_3(\tau')\alpha^{-1}u \,, \qquad a' = \varepsilon'_3(\tau')\alpha'^{-1}u' \,, \qquad a'' = \varepsilon''_3(\tau')\alpha''^{-1}u'' \,,$$

où

$$\varepsilon_3(\tau') = \begin{cases} 1 & si \ \ \varepsilon_3 = 1 \\ \tau' & si \ \ \varepsilon_3 = -1 \end{cases} \,, \qquad \textit{et de même pour } \varepsilon'_3(\tau'), \, \varepsilon''_3(\tau') \,,$$

et où

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3(u) = \varepsilon_3(\chi(u)) \,, \qquad \textit{et de même pour } \varepsilon'_3, \, \varepsilon''_3$$

– donc $\varepsilon''_3 = \varepsilon_3\varepsilon'_3$. On a alors

$$(62) \qquad a'' = \varepsilon a'a \,, \qquad \textit{avec } \varepsilon \in \{\pm 1\} \,,$$

et

(63)
$$\begin{cases} \varepsilon \;=\; +1 \quad \textit{si et seulement si} \quad \varepsilon_3 = 1 \ \text{ ou } \ \varepsilon'_2\varepsilon'_3 = 1 \ , \ \textit{donc} \\ \varepsilon \;=\; -1 \quad \textit{si et seulement si} \quad \varepsilon_3 = -1 \ \ \textit{et} \ \ \varepsilon'_2\varepsilon'_3 = -1 \ . \end{cases}$$

On aura donc

(∗)
$$\begin{cases} \alpha'' &= u''a''^{-1}\varepsilon''_3(\tau') \\ &= \varepsilon u'ua^{-1}a'^{-1}\varepsilon_3(\tau')\varepsilon'_3(\tau') \ . \end{cases}$$

Je présume qu'on aura

(64) $\qquad \alpha'' \;=\; \varepsilon u'(\alpha)\alpha' \ , \qquad$ ([81]) $\qquad$ où ε `[est]` donné par (63).

En effet,

$$\begin{cases} \alpha &= ua^{-1}\varepsilon_3(\tau') \\ \alpha' &= u'a'^{-1}\varepsilon'_3(\tau') \ , \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} u'(\alpha) &= u'ua^{-1}\varepsilon_3(\tau')u'^{-1} \\ u'(\alpha)\alpha' &= u'ua^{-1}\underbrace{\varepsilon_3(\tau')\ \cancel{u}'^{-1}\ \cancel{u}'a'^{-1}}\varepsilon'_3(\tau') \ , \end{aligned}$$

la formule (64), en vertu de (∗), prend donc la forme

$$a'^{-1}\varepsilon_3(\tau') \;=\; \varepsilon_3(\tau')a'^{-1} \ ,$$

i.e.

$$[\varepsilon_3(\tau'), a'^{-1}] \;=\; 1 \ ,$$

elle n'est pas toujours vérifié si $\varepsilon_3 = -1$, i.e. $\varepsilon_3(\tau') = \tau'$, où elle représente encore une restriction draconienne sur a'. La formule toujours correcte est

$$\alpha'' \;=\; (\varepsilon u'(\alpha)\alpha') \cdot \underbrace{\varepsilon'_3(\tau')([a', \varepsilon_3(\tau')])}_{=\,[\varepsilon'_3(\tau')(a'),\varepsilon_3(\tau')]} \ .$$

I.e. comme $\varepsilon'_3(\tau')a' = \alpha'^{-1}u'$ (61), la formule un peu alambiquée ([82]) :

(65)
$$\alpha'' \;=\; (\varepsilon u'(\alpha)\alpha') \cdot [\,\underbrace{\alpha'^{-1}u'}_{=\,\varepsilon'_3(\tau')a'}, \varepsilon_3(\tau')]$$

(où $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ défini dans (63)).

Il reste à examiner la question si l'extension $S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$ de $Z^!_{\rho,\sigma} \simeq \mathcal{M}^![0]$ par $\mu = \{\pm 1\}$ est triviale ou non, tenant compte du fait que ses restrictions à $Z^{!'}_{\rho,\sigma}$ et à $Z^{!'''}_{\rho,\sigma}$ sont triviales. Soient $S_0^\pi\Gamma^{!'}_{\rho,\sigma}$, $S_0^\pi\Gamma^{!'''}_{\rho,\sigma}$ les images inverses de $Z^{!'}_{\rho,\sigma}$, $Z^{!'''}_{\rho,\sigma}$ dans $S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma}$, donc

(66)
$$\begin{cases} S_0^\pi\Gamma^{!'}_{\rho,\sigma} &= S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma} \cap \Gamma^{!'}_{\rho,\sigma} \\ S_0^\pi\Gamma^{!'''}_{\rho,\sigma} &= S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma} \cap \Gamma^{!'''}_{\rho,\sigma} \ , \end{cases}$$

[81] Pas vrai en général.

[82] Sic ! Voilà le monstre qui m'a fait passer par des sueurs froides pendant une semaine ou deux !

et on a des suites exactes d'extensions centrales

$$(67) \qquad \begin{cases} 1 \longrightarrow \mu \longrightarrow S_0^\pi\Gamma^{!'}_{\rho,\sigma} \longrightarrow Z^{!'}_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow \mu \longrightarrow S_0^\pi\Gamma^{!'''}_{\rho,\sigma} \longrightarrow Z^{!'''}_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1\,, \end{cases}$$

qui sont scindées par des sous-groupes notés respectivement $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'}_{\rho,\sigma}$, $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''}_{\rho,\sigma}$, de sorte qu'on a

$$(68) \qquad \begin{cases} S_0^\pi\Gamma^{!'}_{\rho,\sigma} \simeq S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'}_{\rho,\sigma} \times \mu \\ S_0^\pi\Gamma^{!'''}_{\rho,\sigma} \simeq S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''}_{\rho,\sigma} \times \mu\,. \end{cases}$$

`[page 602]`

Je me pose la question si ces sous-groupes

$$(69) \qquad \begin{cases} S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'}_{\rho,\sigma} \subseteq S_0^\pi\Gamma^{!'}_{\rho,\sigma} \subseteq S_0^\pi\Gamma^{!}_{\rho,\sigma} \\ S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''}_{\rho,\sigma} \subseteq S_0^\pi\Gamma^{!'''}_{\rho,\sigma} \subseteq S_0^\pi\Gamma^{!}_{\rho,\sigma} \end{cases} \qquad ([83])$$

sont *invariants* dans $S_0^\pi\Gamma^{!}_{\rho,\sigma}$, ce qui signifierait aussi (passant alors au quotient par ces sous-groupes) que l'extension $S_0^\pi\Gamma^{!}_{\rho,\sigma}$ de $Z^{!}_{\rho,\sigma}$ par μ, scindée sur $Z^{!'}_{\rho,\sigma}$ et sur $Z^{!'''}_{\rho,\sigma}$, provient en fait (avec lesdits scindages) d'extensions de $Z^{!}_{\rho,\sigma}/Z^{!'}_{\rho,\sigma}$ ($\simeq \pm 1$) et de $Z^{!}_{\rho,\sigma}/Z^{!'''}_{\rho,\sigma}$ ($\simeq \pm 1$) par μ, qu'il faudrait ensuite caractériser (comme trivial ou non trivial). Comme les sous-groupes en question sont distingués dans $S_0^\pi\Gamma^{!'}$ `[=` $S_0^\pi\Gamma^{!'}_{\rho,\sigma}$ `etc.]` resp. $S_0^\pi\Gamma^{!'''}$, si x est un élément de $S_0^\pi\Gamma^{!}$ qui n'est *pas* dans $S_0^\pi\Gamma^{!'}$ resp. $S_0^\pi\Gamma^{!'''}$, dire que $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'}$ (resp. $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''}$) est distingué dans $S_0^\pi\Gamma^{!}$ tout entier signifie simplement qu'il est normalisé par x.

1°) Cas de $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'}$ dans $S_0^\pi\Gamma^{!}$. On prendra

$$(70) \qquad \begin{cases} \underline{x} = (u_0, a_0, b_0) \text{ avec } u_0 = \tau, \text{ d'où } \varepsilon_3(u_0) = \varepsilon_2(u_0) = \chi(u_0) = -1, \\ \alpha_0 = \tau,\ \beta_0 = 1,\ a_0 = \varepsilon_{3,0}(\tau')\alpha_0^{-1}u_0 = \tau',\ b_0 = \beta_0^{-1}u_0 = \tau, \end{cases}$$

donc

$$\underline{x} = (u_0 = \tau,\ a_0 = \tau',\ b_0 = \tau)\,,$$

donc on a

$$\underline{x} \in S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''} \subseteq S_0^\pi\Gamma \qquad \text{et} \qquad \underline{x} \notin S_0^\pi\Gamma^{!'}\,,$$

et il faut voir si $\underline{x}$ normalise $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'}$. Soit

$$(71) \qquad \underline{u} = (\underbrace{u}_{\in Z}, \underbrace{a}_{\in \mathcal{N}'_\rho}, \underbrace{b}_{\in \mathcal{N}'_\sigma}) \in S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'}\,, \qquad \text{i.e.} \begin{cases} u \equiv a \equiv b \quad (\pi_0) \\ \varepsilon_3(u) = 1 \end{cases}\,,$$

et calculons

$$\underline{x}\,\underline{u}\,\underline{x}^{-1} = \underline{x}\,\underline{u}\,\underline{x} = (\tau(u), \tau'(a), \tau(b))\,,$$

est-il dans $S_0^{\pi_0}\Gamma'$ (et non seulement dans $S_0^\pi\Gamma'$), i.e. a-t-on

$$(72) \qquad \tau(u) \equiv \tau'(u) \equiv \tau(b) \qquad (\pi_0) \qquad ?$$

[83]Sous-groupes d'indice 4 dans $S_0^\pi\Gamma_{\rho,\sigma}$.

La relation $\tau(u) \equiv \tau(b) \equiv \tau(a)$ est conséquence immédiate de (71), donc (72) équivaut à

$$\tau'(a) \;\equiv\; \tau(a) \quad (\pi_0) \;, \qquad \text{i.e.} \qquad \sigma^{-1}(\tau(a)) \;=\; \tau(a) \;,$$

i.e.

$$(73) \qquad [\dot{\sigma}, \tau(a)^{\cdot}] \;=\; 1 \qquad \text{dans } \mathfrak{S}/\pi_0 \;.$$

Ou encore, en vertu de (35 bis),

$$\varepsilon_2(\tau(a)) \;=\; 1 \;, \qquad \text{i.e.} \qquad \varepsilon_2(a) \;=\; 1 \;,$$

ou enfin (comme $a \equiv u \quad (\pi_0)$)

$$(74) \qquad \varepsilon_2(u) \;=\; 1 \;.$$

Cette condition n'est pas conséquence de la condition $\varepsilon_3(u) = 1$, ce qui montre que $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'}$ n'est pas invariant dans $S_0^{\pi}\Gamma^!$.

[2°)] $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''}$ est-il invariant dans $S_0^{\pi}\Gamma^!$? Soit

$$(75) \qquad \underline{x} \;=\; (u_0, a_0, b_0) \;\in\; S_0^{\pi_0}\Gamma^! \smallsetminus S_0^{\pi}\Gamma^{!'''} \;, \qquad \text{donc} \quad \begin{array}{l} \text{a)} \left\{ \begin{array}{rcl} \varepsilon_3(u_0) & = & 1 \\ \varepsilon_2(u_0) & = & -1 \end{array} \right. \\ \text{b)} \quad u_0 \;\equiv\; b_0 \;\equiv\; a_0 \quad (\pi_0) \;, \end{array}$$

[page 603]

et étudions son action sur

$$(76) \qquad \underline{u} \;=\; (u, a, b) \;\in\; S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{a)} \quad \underbrace{\varepsilon_2(u)}_{=\,\varepsilon_2}\underbrace{\varepsilon_3(u)}_{=\,\varepsilon_3} \;=\; 1 \\ \text{b)} \quad u \;\equiv\; b \;\equiv\; \varepsilon_3(\sigma)a \quad (\pi_0^{\wedge}) \;. \end{array} \right.$$

On a

$$(77) \qquad \underline{x}\,\underline{u}\,\underline{x}^{-1} \;=\; (u_0(u), a_0(a), b_0(b))$$

et la relation $\underline{x}\,\underline{u}\,\underline{x}^{-1} \in S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''}$ s'écrit

$$(78) \qquad u_0(u) \;\equiv\; b_0(b) \;\equiv\; \varepsilon'_3(\sigma) \cdot a_0(a) \qquad (^{84}) \;.$$

Or les relations (75 b) et (76 b) impliquent aussitôt

$$u_0(u) \;\equiv\; b_0(b) \;\equiv\; \underbrace{a_0(\varepsilon_3(\sigma) \cdot a)}_{=\,\varepsilon_3[a_0(\sigma)] \cdot a_0(a)} \;,$$

donc la relation (78) équivaut aussi à

$$(79) \qquad \varepsilon_3[\sigma] \;\equiv\; \varepsilon_3[a_0(\sigma)] \;,$$

[84] NB $\varepsilon_3(u_0(u)) = \varepsilon_3(u)$.

ce qui est automatiquement vérifiée si $\varepsilon_3 = 1$, et pour $\varepsilon_3 = -1$ revient à

$$(80) \qquad \sigma \equiv a_0(\sigma) \quad (\pi_0^\wedge)\ , \qquad \text{i.e.} \qquad \varepsilon_2(a_0) = 1\ , \qquad \text{i.e.} \qquad \varepsilon_2(u_0) = 1\ ,$$

relation qui est *fausse* par l'hypothèse (75 a). Donc on trouve encore $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''}$ non invariant dans $S_0^{\pi}\Gamma^!$. Par contre, posons

$$(81) \qquad \begin{cases} S_0\Gamma^0 &= \operatorname{Ker}(S_0\Gamma^0 \xrightarrow{(\varepsilon_2,\varepsilon_3)} \mu\times\mu) &= S_0\Gamma^! \cap S_0\Gamma^! \\ & &= S_0\Gamma^{!'} \cap S_0\Gamma^{!''} \\ & &= S_0\Gamma^{!''} \cap S_0\Gamma^{!''} \qquad [^{85}] \\ S_0^{\pi}\Gamma^0 &= S_0\Gamma^{!\,0} \cap S_0^{\pi}\Gamma^! \\ S_0^{\pi_0}\Gamma^0 &= S_0\Gamma^{!\,0} \cap S_0^{\pi_0}\Gamma^!\ , \end{cases}$$

de sorte qu'on a une suite exacte

$$(82) \qquad 1 \longrightarrow \mu \longrightarrow S_0^{\pi_0}\Gamma^{!\,0} \longrightarrow S_0\Gamma^{!\,0} \longrightarrow 1\ ,$$

canoniquement scindée par $S_0^{\pi_0}\Gamma_0$ – on trouve donc

$$(82) \qquad S_0^{\pi}\Gamma^{!\,0} = S_0^{\pi_0}\Gamma^{!\,0} \times \mu \qquad [^{86}]\ .$$

Ceci posé, les calculs précédents montrent que $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!\,0}$, qui est d'indice 8 dans $S_0^{\pi}\Gamma^!$, est un sous-groupe invariant. En résumé :

Proposition. *Considérons les sous-groupes $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'}$, $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''}$, $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!\,0}$ de $S_0^{\pi}\Gamma^!$ (d'indices* 4, 4, 8*), qui sont les images des restrictions respectives $Z^{!'}$, $Z^{!'''}$, $Z^{!\,0}$ de la section ensembliste A définie par* (51), (52) *de $S_0^{\pi}\Gamma^!$ sur $Z = \mathcal{M}[0]$ - qui est multiplicative sur ces sous-groupes, et définit donc des scindages des images inverses $S_0^{\pi}\Gamma^{!'}$, $S_0^{\pi}\Gamma^{!'''}$, $S_0^{\pi}\Gamma^{!\,0}$ de $Z^{!'}$, $Z^{!'''}$, $Z^{!\,0}$ dans $S_0^{\pi}\Gamma^!$:*

$$(83) \qquad S_0^{\pi}\Gamma^{!'} \simeq S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'} \times \mu\ , \qquad S_0^{\pi}\Gamma^{!'''} \simeq S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''} \times \mu\ , \qquad S_0^{\pi}\Gamma^{!\,0} \simeq S_0^{\pi_0}\Gamma^{!\,0} \times \mu\ .$$

On a alors ceci :

a) $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'}$, $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''}$ *ne sont* pas *distingués dans* $S_0^{\pi}\Gamma^!$ ([87]).

b) $S_0^{\pi_0}\Gamma^{!\,0}$ *est distingué dans* $S_0^{\pi}\Gamma^!$*, de sorte que l'extension* $S_0^{\pi}\Gamma^!$ *de* $Z^! \simeq \mathcal{M}^![0]$ *par* μ *est canoniquement isomorphe à l'image inverse d'une extension centrale (savoir* $S_0^{\pi}\Gamma^!/S_0^{\pi_0}\Gamma^{!\,0}$*) de* $Z^!/Z^{!\,0} \simeq \mu\times\mu$ *par* μ.

[page 604]

Examinons cette extension centrale

$$(84) \qquad 1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \underbrace{\mathcal{E}}_{\simeq S_0^{\pi}\Gamma^!_{\rho,\sigma}/S_0^{\pi_0}\Gamma^{!0}_{\rho,\sigma}} \xrightarrow{(\varepsilon_3,\varepsilon_2)} \mu\times\mu \longrightarrow 1\ ,$$

[85] [?, les $S_0\Gamma$s à droite manquent partiellement sur la copie.]

[86] [Deux fois (82).]

[87] Ce qui implique qu'il n'existe pas de section (multiplicative) de l'extension $S_0^{\pi}\Gamma$ de $Z^!$ par Γ, qui coïncide avec A sur $Z^{!'}$ ou sur $Z^{!'''}$.

s'insérant dans le diagramme d'extensions

$$
(85)\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mu \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mu\times\mu \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu \arrow[r] \arrow[u, "\mid"'] \arrow[d, hook] & S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, hook] & Z^!_{\rho,\sigma} \simeq \mathcal{M}^![0] \arrow[u, "(\varepsilon_3,\varepsilon_2)"'] \arrow[d, hook, "\mid"] & \\
1 \arrow[r] & L_\rho\times L_\sigma \arrow[r] & S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma} \arrow[r] & Z^!_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1\ .
\end{tikzcd}
$$

L'intérêt de (84) est qu'elle permet de récupérer l'extension $S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}$ de $Z^!_{\rho,\sigma}$ par $L_\rho \times L_\sigma$, par la loi covariante-contravariante dans le foncteur 'extensions', via

$$
(86)\qquad Z^!_{\rho,\sigma} \xrightarrow{(\varepsilon_3,\varepsilon_2)} \mu\times\mu\ , \qquad \begin{array}{ccc} \mu & \hookrightarrow & L_\rho\times L_\sigma \\ -1 & \longmapsto & (\rho^3,\sigma^2) \end{array}
$$

('homomorphisme diagonal') ,

ainsi que la sous-extension $S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma}$ de celle-ci (de $Z^!_{\rho,\sigma}$ par μ).

Étudions d'abord l'ordre des éléments de $\mathcal{E}$ – ils sont évidemment diviseurs de 4, sont-ils tous d'ordre 2 (ou 1) ? Soit donc

$$
(87)\qquad \underline{u} \;=\; (\underbrace{u}_{\in Z},\underbrace{a}_{\in\mathcal{N}_\rho^*},\underbrace{b}_{\in\mathcal{N}_\sigma^*}) \in S_0^\pi\Gamma^!\ , \qquad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{lll} u & \equiv & b \qquad (\pi_0^\wedge) \\ u & \equiv & \varepsilon_3[\sigma]a \quad (\pi^\wedge) \end{array}\right. \qquad ({}^{88})\ .
$$

Je veux examiner si $\underline{u}^2 \in S_0^{\pi_0}\Gamma^{!\,0}$. Évidemment

$$
\underline{u} \;=\; (u^2,a^2,b^2) \in S_0^\pi\Gamma^{!\,0}\ ,
$$

il reste à voir si $\underline{u}^2 \in S_0^{\pi_0}\Gamma^!$, i.e. si on a non seulement $u^2 \equiv b^2\ \ (\pi_0)$ et $u^2 \equiv a^2\ \ (\pi^\wedge)$ – ce qui est clair et exprime simplement $\underline{u}^2 \in S_0^\pi\Gamma$ – mais même

$$
(88)\qquad u^2 \;\equiv\; a^2 \qquad \operatorname{mod}\ \underline{\underline{\pi_0^\wedge}} \qquad (?)\ .
$$

La relation

$$
u \;\equiv\; \varepsilon_3[\sigma]\cdot a \qquad \operatorname{mod}\ \pi
$$

s'écrit aussi

$$
u \;\equiv\; \pm\varepsilon_3[\sigma]\cdot a \qquad \operatorname{mod}\ \pi_0
$$

et implique

$$
u^2 \;\equiv\; \varepsilon_3[\sigma]\,a\,\varepsilon_3[\sigma]\,a \qquad \operatorname{mod}\ \pi_0\ ,
$$

ce qu'on peut écrire

$$
(89)\qquad u^2 \;\equiv_{\operatorname{mod}\ \pi_0^\wedge}\; \varepsilon_3\varepsilon_3[\sigma](a)\cdot a \;=\; \left\{\begin{array}{lllll} a^2 & \text{si} & \varepsilon_3 & = & 1 \\ -\sigma(a)\cdot a & \text{si} & \varepsilon_3 & = & -1 \end{array}\right.\ .
$$

[88]**NB** Pour éviter des confusions, on écrit $\varepsilon_3[\sigma]$, $\varepsilon_3[\tau']$ etc. au lieu de $\varepsilon_3(\sigma)$, $\varepsilon_3(\tau')$ pour σ^{ν_3}, τ'^{ν_3} etc.

Donc (88) est vraie si $\varepsilon_3 = 1$, tandis que pour $\varepsilon_3 = -1$, elle équivaut à

$$\sigma(a) \equiv -a \qquad (\pi_0^\wedge) ,$$

i.e.

$$[\sigma, a]^{\cdot} = -1 \qquad \text{dans } \mathfrak{S}/\pi_0 ,$$

i.e.

$$\underbrace{\varepsilon_2(a)}_{=\varepsilon_2(u)} = -1 , \qquad \text{i.e. } \varepsilon_2(u)\varepsilon_3(u) = 1 .$$

Donc on trouve :

Proposition. *Soit $x \in \mathcal{E}$ (cf. (89)). Pour que l'on ait $x^2 = 1$, il faut et il suffit qu'on ait $\varepsilon_3(x) = 1$ ou $\varepsilon_2(x)\varepsilon_3(x) = 1$, i.e. que l'on ait*

(90) $$x \in \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''' ,$$

`[page 605]`

où

(91) $$\mathcal{E}' = \{x \in \mathcal{E} \mid \varepsilon_3(x) = 1\} , \qquad \mathcal{E}''' = \{x \in \mathcal{E} \mid \varepsilon_2(x)\varepsilon_3(x) = 1\} .$$

Corollaire 1. *$\mathcal{E}$ a exactement deux éléments d'ordre 4, qui sont les deux éléments de $\mathcal{E}$ au dessus de l'élément $(-1, 1)$ de $\mu \times \mu$. Ces deux éléments sont inverses l'un de l'autre, ce sont les deux générateurs du seul sous-groupe cyclique d'ordre 4 de $\mathcal{E}$, qui n'est autre que $\mathcal{E}'' = \{x \in \mathcal{E} \mid \varepsilon_2(x) = 1\}$.*

Corollaire 2. *L'extension $\mathcal{E}$ n'est pas scindée.*

Car étant centrale, elle serait isomorphe à $(\mu \times \mu) \times \mu$, donc ses éléments seraient d'ordre qui divise 2.

Nous pouvons regarder maintenant $\mathcal{E}$ comme extension de $\mathcal{E}/\mathcal{E}'' \simeq \{\pm 1\} = \mu$ par $\mathcal{E}''$ ($\simeq \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$). Il faudrait d'abord expliciter l'opération de $\mathcal{E}/\mathcal{E}'' = \mu$ sur $\mathcal{E}'$ – l'élément -1 d'ordre 2 de μ induit un automorphisme involutif de $\mathcal{E}''$; d'ailleurs $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}') \simeq (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^* \simeq \{\pm 1\}$, donc l'automorphisme en question est la multiplication par un signe ± 1, qu'il faut déterminer. On va nommer `[un]` représentant de $-1 \in \mathcal{E}/\mathcal{E}''$ `[et]` prendre l'élément de $\mathcal{E}$ provenant de

(92) $$\underline{x} = (u_0 = \tau,\ a_0 = \tau',\ b_0 = \tau) \in S_0^{\pi_0}\Gamma^{!'''} \qquad \text{(cf. (70))} ,$$

qu'on va faire opérer sur l'image d'un

(93) $$\underline{u} = (u, a, b) \in S_0^{\pi}\Gamma^{!} , \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_3(u) = -1 \\ \varepsilon_2(u) = 1 \\ u \equiv b \mod \pi_0^\wedge \\ u \equiv \sigma a \mod \pi^\wedge \end{cases}$$

(qui est un générateur de $\mathcal{E}''$). On aura donc

$$\underline{x}(\underline{u}) = (\tau(u), \tau'(a), \tau(b)) \equiv \underbrace{(1, \varepsilon, \varepsilon)(u, a, b)}_{=(u,\varepsilon a,\varepsilon b)}$$

modulo $S_0^{\pi_0}\Gamma^0$, avec un signe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ à déterminer. La condition de congruence s'écrit

$$(\ u\tau(u)^{-1},\ \varepsilon a\tau'(a)^{-1},\ \varepsilon b\tau'(b)^{-1}\ )\ \in\ S_0^{\pi_0}\Gamma^0\ ,$$

qu'on soit dans $S_0^{\pi}\Gamma^{!\,0}$ est évident et valable quel que soit le choix du signe ε ; c'est la condition de congruence qui distingue $S_0^{\pi_0}\Gamma^!$ de $S_0^{\pi}\Gamma^!$ qui est essentielle, savoir

$$u\tau(u)^{-1}\ \equiv\ \varepsilon a\tau'(a)^{-1} \qquad (\pi_0^\wedge)\ . \tag{94}$$

La difficulté dans cette approche vient du fait que les seuls éléments de $\mathcal{M}$ qu'on sache expliciter sont ceux qui proviennent de $\mathfrak{G} \simeq \mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})$ lui-même, or pour ceux-ci, on a $\varepsilon_2(u)\varepsilon_3(u) = 1$, alors que le u ci-dessus doit satisfaire $\varepsilon_2(u) = 1$, $\varepsilon_3(u) = -1$, donc $\varepsilon_2(u)\varepsilon_3(u) = -1$. On peut d'autre part travailler dans le quotient $\mathrm{GL}(2, \hat{\mathbf{Z}})$ de $\mathcal{M}$, et y prendre

$$u = \left(\begin{smallmatrix}\mu & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \qquad \text{avec } \mu \in \hat{\mathbf{Z}}^*\ , \quad \left\{\begin{array}{rrl} & \mu \equiv & -1\ (3)\\ & \mu \equiv & 1\ (4)\\ \text{i.e.} & \mu \equiv & 5\ (12)\ ,\end{array}\right. \tag{95}$$

tandis que τ correspond à la matrice

$$\tau\ =\ \left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\ ;$$

`[page 606]`

on aura de toutes façons

$$u\tau(u)^{-1}\ =\ 1\ .$$

Soit d'autre part dans $\mathrm{GL}(2, \hat{\mathbf{Z}})$

$$\left\{\begin{array}{l} a\ =\ \tau' a_0\ , \qquad a_0\ =\ c\rho + d\ , \qquad c^2 + cd + d^2 \in \hat{\mathbf{Z}}^*\\ \qquad\qquad \tau'\ =\ \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\ , \qquad \rho\ =\ \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{smallmatrix}\right)\ ,\end{array}\right. \tag{96}$$

donc

$$a\ =\ \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}d & c\\ -c & c+d\end{smallmatrix}\right)\ =\ \left(\begin{smallmatrix}-c & c+d\\ d & c\end{smallmatrix}\right) \tag{97}$$

et

$$\mu\ =\ -(c^2 + cd + d^2) \qquad ({}^{89})\ . \tag{98}$$

On travaillera avec le sous-groupe fermé $\pi_0^\wedge$ dans $\mathrm{SL}(2, \hat{\mathbf{Z}})$ engendré par

$$-l_0\ =\ -\left(\begin{smallmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\ , \qquad -l_1\ =\ -\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)\ , \qquad -l_\infty\ =\ -\left(\begin{smallmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{smallmatrix}\right)$$

et dans le groupe quotient de $\mathrm{GL}(2, \hat{\mathbf{Z}})$ par $\pi_0^\wedge$, qui est extension de $\hat{\mathbf{Z}}^*$ par

$$\mathrm{SL}(2, \hat{\mathbf{Z}})/\pi_0^\wedge\ \simeq\ \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})/\pi_0\ \simeq\ \{(\rho, \sigma) \mid \rho^6 = \sigma^4 = 1,\ \rho^3 = \sigma^2,\ \sigma(\rho) = \rho^{-1}\}$$

`[c.à.d.` $\langle \rho, \sigma \mid \ldots \rangle$`]`, et même produit semi-direct grâce à

$$T_0\ =\ \{\left(\begin{smallmatrix}\xi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \mid \xi \in \hat{\mathbf{Z}}^*\}\ \overset{\det}{\simeq}\ \hat{\mathbf{Z}}^*$$

[89] Un peu bref, cf. plus bas ...

opérant par l'intermédiaire de $\varepsilon_2(\xi)$ [?] (cf. p. 593, 594 – formules (34), (35), (35 bis)). On doit supposer

$$\sigma a \equiv u \qquad (\pi^\wedge)\,, \qquad \text{où } \sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\,, \tag{99}$$

donc

$$\sigma a = \left(\begin{smallmatrix} -d & -c \\ -c & c+d \end{smallmatrix}\right)\,. \tag{100}$$

La relation (99) s'écrit

$$\begin{cases} a \equiv u \quad (\mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}}))\,, & \text{i.e.}\quad \det \sigma a = \det u\,, \qquad \text{i.e. (98)} \\ \sigma a \equiv u \quad (2) \end{cases} \quad [90]\,, \tag{102}$$

et cette dernière congruence s'écrit

$$c \equiv 0 \quad (2)\,, \qquad d \equiv 1 \quad (2) \qquad ([91])\,. \tag{103}$$

NB On ne peut avoir la congruence *mod 4* : $\sigma a \equiv u \quad (4)$, car on aurait $\mu \equiv -d \equiv -1 \quad (4)$, ce qui est contraire à l'hypothèse (95) : $\mu \equiv 1 \quad (4)$.

Revenant à la relation (94), on trouve ceci :

Lemme. *Soient $c, d \in \hat{\mathbf{Z}}$ satisfaisant*

$$\mu \overset{\text{def}}{=} -(c^2 + cd + d^2) \in \hat{\mathbf{Z}}^* \qquad ([92])\,, \tag{104}$$

$$\mu \equiv 1 \quad (4) \qquad \textit{(i.e. } c^2 + cd + d^2 \equiv -1 \quad (4)\textit{)}\,, \tag{105}$$

$$c \equiv 0 \quad (2)\,, \qquad d \equiv 1 \quad (2)\,. \tag{106}$$

Soit

$$a = \tau'(c\rho + d) = \left(\begin{smallmatrix} -c & c+d \\ d & c \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2, \hat{\mathbf{Z}}) \tag{107}$$

(entier de déterminant μ). Alors on a une congruence

$$a\tau'(a)^{-1} \equiv \varepsilon \qquad \textit{mod } \pi_0^\wedge \subseteq \mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}})\,, \tag{108}$$

et le signe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ ne dépend pas des choix faits pour c, d.

[page 607]

C'est le moment de le calculer ! Reprenant

$$a_0 = c\rho + d \in Z_\rho\,,$$

on aura

$$a = \tau' a_0\,, \qquad \tau'(a) = a_0\tau'\,, \qquad a\tau'(a)^{-1} = \tau' a_0 \tau'^{-1} a_0^{-1} = \tau'(a_0)a_0^{-1}\,,$$

[90] [(101) n'existe pas.]

[91] $-d \equiv \mu \quad (2)$ en est une conséquence, car $\mu \equiv 1 \equiv -1 \quad (2)$.

[92] **NB** On aura nécessairement $\mu \equiv -1 \quad (3)$.

où

$$\begin{cases} \tau'(a_0) \;=\; c\rho^{-1}+d \;=\; {}^{\mathrm{t}}a_0 \\ a_0^{-1} \;=\; {}^{\mathrm{t}}a_0/\det a_0 \;=\; -\frac{1}{\mu}(c\rho^{-1}+d) \;, \end{cases} \qquad ({}^{93})$$

donc

$$a\tau'(a)^{-1} \;=\; \tau'(a_0)a_0^{-1} \;=\; -\frac{1}{\mu}(c\rho^{-1}+d)^2 \;=\; \frac{1}{c^2+cd+d^2}(c\rho^{-1}+d)^2 \;.$$

Or on a

$$(c\rho^{-1}+d)^2 \;=\; c^2\underbrace{\rho^{-2}}_{=\,-\rho} + 2\,c\,d\underbrace{\rho^{-1}}_{=\,1-\rho} + d^2 \;=\; -(c^2+2cd)\rho + (2cd+d^2)\;.$$

Or

$$\begin{aligned} c \;&\equiv\; 0 \quad (2) \;\Longrightarrow\; c^2,\ 2cd \;\equiv\; 0 \quad (4) \\ d \;&\equiv\; 1 \quad (2) \;\Longrightarrow\; \qquad d^2 \;\equiv\; 1 \quad (4)\;, \end{aligned}$$

donc

$$(*) \qquad (c\rho^{-1}+d)^2 \;\equiv\; 1 \qquad (4)\;,$$

et comme par hypothèse

$$c^2+cd+d^2 \;\equiv\; -1 \qquad (4)\;,$$

on aura

$$(109) \qquad a\tau'(a)^{-1} \;=\; \frac{1}{c^2+cd+d^2}(c\rho^{-1}+d)^2 \;\equiv\; -1 \qquad (4)\;.$$

Donc on a prouvé, en fait :

Proposition. *Soient c, $d \in \hat{\mathbf{Z}}$ tels que $\xi \overset{\text{def}}{=} c^2+cd+d^2 \in \hat{\mathbf{Z}}^*$, soit*

$$a \;=\; \tau'(c\rho+d) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} -c & c+d \\ d & c \end{smallmatrix}\right) \;\in\; \mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}})\;,$$

supposons

$$\sigma a \;\equiv\; \left(\begin{smallmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \qquad (2) \qquad\qquad ({}^{94})\;,$$

i.e.

$$c \;\equiv\; 0 \quad (2)\;, \qquad d \;\equiv\; 1 \quad (2)\;.$$

Alors on a (posant $\tau' = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$)

$$a\tau'(a)^{-1} \;\equiv\; \varepsilon_2(\xi) \qquad (4)$$

(a fortiori on a la congruence modulo $\pi_0^\wedge$).

Corollaire. *L'extension $\mathcal{E}$ de $\mu\times\mu$ par μ (84), ou de μ par $\mathcal{E}'' \simeq \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, est non commutative.*

Mais voici une façon de le voir sans calcul. Si l'extension était commutative, sa classe d'isomorphie serait donnée par un $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}$ (ou un $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}}$). Or le foncteur $\mathrm{Ext}^1(-,\mu)$ est

[93] On pose dans $\mathrm{M}_2(\hat{\mathbf{Z}})$

$${}^{\mathrm{t}}u \;=\; (\mathrm{Tr}\,u) - u\;,$$

et on aura ${}^{\mathrm{t}}\rho = \rho^{-1}$ (plus généralement ${}^{\mathrm{t}}u = u^{-1}$ si $\det u = 1$)

[94] **NB** $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

additif. Comme la restriction de l'extension aux sous-groupes $\mathcal{E}'/\mu$ et $\mathcal{E}'''/\mu$ de $\mu \times \mu$ est triviale, et que $\mu \times \mu$ est la somme directe de ces sous-groupes (qui sont respectivement $1 \times \mu$ et le sous-groupe diagonal), il s'ensuivrait que l'extension serait triviale, or on a vu que ce n'est pas le cas.

La structure du groupe $\mathcal{E}$ s'explicite aisément, p.ex. en tant qu'extension de $\mathcal{E}/\mathcal{E}'' \simeq \mu$ par $\mathcal{E}'' \simeq \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. Choisissons un élément quelconque $[x]$ de $\mathcal{E} \smallsetminus \mathcal{E}''$, il est d'ordre 2 (les seuls éléments d'ordre 4 étant dans $\mathcal{E}''$), de sorte que l'on a

[page 608]

$$\mathcal{E} \simeq \underbrace{\{1, x\} \cdot \mathcal{E}''}_{\text{(semi-direct)}} . \tag{110}$$

Notons que si x opérait trivialement sur $\mathcal{E}''$, i.e. si $\mathcal{E}$ était isomorphe au produit, alors pour un élément u de $\mathcal{E}''$ d'ordre 4, $x \cdot u$ serait d'ordre 4, ce qui est absurde (troisième démonstration du fait que $\mathcal{E}/\mathcal{E}'' \simeq \mu$ opère non trivialement sur $\mathcal{E}''$). Or du seul fait que l'opération de $\{1, x\}$ sur $\mathcal{E}''$ est non triviale, elle est connue, donc la structure de $\mathcal{E}$ est déterminée – en fait on a

$$\mathcal{E} \simeq \mathbf{D}_4 . \tag{111}$$

Il y a un choix privilégié de x, en prenant pour x l'élément

$$\begin{cases} \tau_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \tau_{S_0\Gamma} \bmod S_0^{\pi_0}\Gamma^0 \text{ , où bien sûr} \\ \tau_{S_0\Gamma} = (\tau, \tau', \tau) , \end{cases} \tag{112}$$

de sorte que l'on a une représentation canonique

$$\mathcal{E} \simeq \underbrace{\{1, \tau_{\mathcal{E}}\} \cdot \mathcal{E}''}_{\text{produit semi-direct}} \qquad ({}^{95}) . \tag{113}$$

L'homomorphisme $\mathcal{E} \longrightarrow \mu \times \mu$ se récupère par ses restrictions aux deux facteurs

$$\begin{cases} \mu \simeq \{1, \tau_\varepsilon\} \longrightarrow \mu \times \mu , \qquad \tau_\varepsilon \longmapsto (-1, -1) \qquad \text{(homomorphisme diagonal)} \\ \mathcal{E}'' \underbrace{\xrightarrow{\qquad\qquad}}_{\substack{\text{l'unique homomorphisme} \\ \text{non trivial } \mathcal{E}'' \longrightarrow \mu, \\ \text{déduit de l'isomorphisme} \\ \mathcal{E}''_2 \overset{\text{def}}{=} \mathcal{E}''/2\mathcal{E}'' \xrightarrow{\sim} \mu}} \mu \times \{1\} \hookrightarrow \mu \times \mu . \end{cases} \tag{114}$$

Le fait que $\mathcal{E}$ ne soit par commutative s'exprime aussi par le fait que l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{E}_{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \mu \times \mu \tag{115}$$

est un isomorphisme, i.e. que le sous-groupe noyau μ de $\mathcal{E}_{\text{ab}} \longrightarrow \mu \times \mu$ est aussi le sous-groupe des commutateurs.

[95] $\mathcal{E}'' \simeq \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $\tau_{\mathcal{E}}(u) = u^{-1}$ pour $u \in \mathcal{E}''$.

On a vu que l'extension $\mathcal{E}$ de $\mu\times\mu$ par μ n'est pas scindée, mais qu'en est-il de son image inverse, l'extension $S_0^\pi\Gamma^!$ de $Z^!\simeq\mathcal{M}[0]$ par μ ? A priori, nous savons seulement qu'il n'y a pas de scindage de cette extension qui prolonge le scindage canonique A dont on dispose au dessus de $Z^0=\mathrm{Ker}(Z^!\xrightarrow{(\varepsilon_3,\varepsilon_2)}\mu\times\mu)$. Je présume que même $S_0^\pi\Gamma''$, extension de $Z^{!\prime\prime}$ par μ, est non triviale, et même l'extension qu'elle induit du sous-groupe

$$\mathbf{\Gamma}'_{\mathbf{Q}} \;=\; \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}\cap\underbrace{\mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}}}_{\simeq\,\mathcal{M}[0]'} \;\subseteq\; \mathcal{M}[0]\;\subseteq\;\mathcal{M}^![0]\;=\;Z^!\,.$$

Il serait intéressant d'identifier, plus précisément, l'extension par $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}$ qu'elle induit, qui correspond à un élément canonique

(115) $$c\;\in\;\mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}\,\mathbf{Q},\boldsymbol{\mu}_2)\;\subseteq\;\mathrm{Br}(\mathbf{Q})\,,$$

`[page 609]`

sauf erreur on aura

(115) $$c\;=\;\underbrace{\xi'\xi''}_{\text{cup-produit}}\qquad$$ [[96]] ,

où $\xi,\,\xi''\;\in\;\mathrm{H}^2(\mathbf{Q},\boldsymbol{\mu}_2)$ sont les éléments qui décrivent respectivement les extensions $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{1})=\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, et $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ – contenues l'une et l'autre, ainsi que $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})=\mathbf{Q}(i)$, dans l'extension biquadratique $\mathbf{Q}(\underbrace{i}_{=\sqrt[2]{-1}},\underbrace{j}_{=\sqrt[3]{1}})\;=\;\mathbf{Q}(\sqrt[12]{1})$, le corps des racines 12$^{\text{ièmes}}$ de l'unité (dont le groupe de Galois est $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^*\simeq(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^*\times(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^*\simeq\mu\times\mu$). Il doit être trivial – quand on connaît un peu les fondements – que c ainsi explicité est $\neq 0$, et n'est pas non plus scindé en passant à $\mathbf{Q}(i)$, le troisième larron.

Considérons maintenant le plongement central

(116) $$\begin{array}{ccc}\mu & \xhookrightarrow{i_{\rho,\mu}} & S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}\;=\;Z^!_{\rho,\sigma}\times_\Upsilon\mathcal{N}^*_\rho\times_\Upsilon\mathcal{N}^*_\sigma\\ \varepsilon & \longmapsto & (1,\varepsilon,1)\end{array}$$ ([97])

à valeurs dans

$$\mathrm{Ker}(S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}\longrightarrow Z^!_{\rho,\sigma})\;\simeq\;L_\rho\times L_\sigma\,,$$

on a donc un homomorphisme canonique de relèvement

(117) $$\mathcal{M}^![0]\;\simeq\;Z^!_{\rho,\sigma}\;\simeq\;S_0^\pi\Gamma^!_{\rho,\sigma}/\mu\;\longrightarrow\;S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}/i_{\rho,\mu}(\mu)\,,$$

[96] `[Trois fois (115).]`

[97] **NB**

$$\begin{aligned}Z&\;\simeq\;\mathcal{M}[0]\\ \Upsilon&\;\simeq\;\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}\,.\end{aligned}$$

qui s'explicite en termes de deux homormorphismes canoniques fondamentaux ([98])

(118)
$$\underbrace{Z^!_{\rho,\sigma}}_{\simeq \mathcal{M}[0] \simeq \Gamma^\sim_{\mathbf{Q}} \cdot L_0^\pi} \xrightarrow{\underline{a}} \mathcal{N}^*_\rho/\mu \,, \qquad Z^!_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\underline{b}} \mathcal{N}^*_\sigma \,,$$

où, je rappelle

(119)
$$\begin{cases} \mathcal{N}^*_\rho & = & \{u \in \mathcal{M} \mid u(\rho) = \rho^{\varepsilon_3(u)}\} \\ & \subseteq & \mathcal{M} \ = \ \mathcal{N}^\sim_{1,1} \ \simeq \ \mathbf{\Gamma}^\sim_{\mathbf{Q}} \cdot \underbrace{\mathfrak{S}^+}_{= \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^\wedge} \\ \mathcal{N}^*_\sigma & = & \{u \in \mathcal{M} \mid u(\sigma) = \sigma^{\varepsilon_2(u)} \ (= \varepsilon_2(u)\sigma)\} \\ & \subseteq & \mathcal{M} \,. \end{cases}$$

Les applications $\underline{a}$, $\underline{b}$ sont données par les formules (cf. 51)

(120)
$$\begin{cases} \underline{a}(u) \ = \ a \ = \ \varepsilon_3[\tau']\alpha^{-1}u \,, \qquad \underline{b}(u) \ = \ b \ = \ \beta^{-1}u \,, \qquad \text{i.e.} \\ \alpha \ = \ ua^{-1}\varepsilon_3[\tau'] \,, \qquad \beta \ = \ ub^{-1} \,, \end{cases}$$

où $\alpha \in \pi^\wedge_{0\tau}$, $\beta \in \pi^\wedge_0$ sont caractérisés par

(121)
$$u(\rho) \ = \ \mathrm{int}(\alpha)(\rho) \,, \qquad u(\sigma) \ = \ \varepsilon_2(\sigma)\,\mathrm{int}(\beta)(\sigma) \,.$$

Les quantités $a = \underline{a}(u) \in \mathcal{N}^*_\rho/\mu$, $b = \underline{b}(u) \in \mathcal{N}^*_\sigma$ sont caractérisés en termes de $u \in Z^!$ (a au signe près seulement) par les congruences

(122)
$$u \ \equiv \ b \quad (\pi^\wedge_0) \,, \qquad u \ \equiv \ \varepsilon_3[\sigma]a \quad (\pi^\wedge) \,,$$

qui impliquent a fortiori (réduisant modulo $\mathfrak{S}^{+\wedge}$) qu'on a commutativité dans

`[page 610]`

(123)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{N}^*_\rho/\{\pm 1\} \arrow[dr, "\delta_\rho"] & \\ Z^!_{\rho,\sigma} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, "\delta_Z"] & & \Upsilon_{\rho,\sigma} \ \simeq \ \mathbf{\Gamma}^\sim_{\mathbf{Q}} \\ & \mathcal{N}^*_\sigma \arrow[ur, "\delta_\sigma"] & \end{tikzcd} \,.$$

Il serait temps de rectifier la confusion (p. 594) entre $Z = Z_{\rho,\sigma} \subseteq \mathcal{M}^\sim_{0,3}$, et $Z^! = Z^!_{\rho,\sigma} = Z \cap \mathcal{M}^{!\sim}_{0,3}$. On a en effet

(124)
$$Z_{\rho,\sigma} \ \simeq \ \underbrace{\mathcal{M}(0) \cdot L_0^{\mathfrak{S}}}_{\text{semi-direct, } \subseteq \ \mathcal{M}} \ \xrightarrow{\ \sim\ } \ \underbrace{\mathcal{M}^\sim_{0,3} \cdot L_0^{\mathfrak{S}_{0,3}}}_{\subseteq \mathcal{M}^\sim_{0,3}}$$

(125)
$$Z^!_{\rho,\sigma} \ \simeq \ Z^!_{\rho,\sigma} \cap \mathcal{M}^! \ = \ \underbrace{\mathcal{M}(0) \cdot L_0^\pi}_{\text{semi-direct, } \subseteq \ \mathcal{M}} \ \xrightarrow{\ \sim\ } \ \underbrace{\mathcal{M}^\sim_{0,3}(0) \cdot L_0^{\pi_{0,3}}}_{\subseteq \mathcal{M}^\sim_{0,3}}$$

[98]Ceci mérite d'être explicité dans un théorème récapitulatif . . .

`[plutôt` $Z_{\rho,\sigma} \cap \mathcal{M}^!$ `?]`. Le lien entre les deux est donné par le diagramme

(126)
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & L_0^\pi \arrow[r] \arrow[d, hook] & Z^!_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, hook, "2"'] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & L_0^{\mathfrak{S}} \arrow[r] & Z_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \underbrace{\Upsilon_{\rho,\sigma}}_{\simeq \mathcal{M}(0) \simeq \mathbf{\Gamma}^\sim_{\mathbf{Q}}} \arrow[r] & 1 , \end{tikzcd}$$

où $L_0^\pi \longrightarrow L_0^{\mathfrak{S}}$ est l'inclusion d'indice 2 de

(127)
$$L_0^\pi \;=\; \underbrace{l_0^{\hat{\mathbf{Z}}}}_{=(\varepsilon_0^2)^{\hat{\mathbf{Z}}}} \;\hookrightarrow\; L_0^{\mathfrak{S}} \;=\; \varepsilon_0^{\hat{\mathbf{Z}}} \; .$$

Bien entendu, c'est bien sur $Z^!_{\rho,\sigma}$, non sur $Z_{\rho,\sigma}$, qu'on a défini (117), (118), d'où (123). Je m'intéresse à la restriction des homomorphismes (123) au sous-groupe L_0^π de $Z^!_{\rho,\sigma}$; la caractérisation (122) montre que l'homomorphisme induit

$$L_0^\pi \longrightarrow \mathcal{N}_\rho^*/\{\pm 1\}$$

est trivial (car a en termes de u ne dépend que de u modulo $\pi^\wedge$), tandis que l'homomorphisme induit

$$L_0^\pi \longrightarrow \mathcal{N}_\rho^*$$

se factorise par $L_0^\pi / L_0^{\pi_0} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (car b en termes de u ne dépend que de u modulo $\pi_0^\wedge$). Sa valeur b sur $\dot{l}_0$ est caractérisée par les conditions

$$b \;\in\; \mathcal{N}_\sigma^* \; , \qquad b \;\equiv\; l_0 \quad (\pi_0) \; ,$$

qui sont satisfaites évidemment par $b = -1$. Donc il y a lieu d'introduire aussi, qu'on le veuille ou non, le plongement central canonique

(128)
$$\begin{array}{ccc} \mu & \hookrightarrow & \mathcal{N}_\sigma^* \\ -1 & \longmapsto & -1 \end{array}$$

et on a commutativité dans

(129)
$$\begin{tikzcd} L_0^\pi \arrow[r, hook] \arrow[d] & Z^!_{\rho,\sigma} \arrow[d] \\ L_0^\pi / L_0^{\pi_0} \simeq \mu \arrow[r, hook] & \mathcal{N}_\sigma^* \; . \end{tikzcd}$$

Donc on trouve, à partir des deux homomorphismes (123)

[page 611]

de $Z^!_{\rho,\sigma}$, par passage au quotient deux homomorphismes canoniques

$$
(130) \qquad
\begin{tikzcd}
\Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{N}^*_\rho/\{\pm 1\} \\
\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} \arrow[d, equal] & \\
\Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \mathcal{N}^*_\sigma/\{\pm 1\} \ ,
\end{tikzcd}
$$

qui sont en fait des sections de

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{N}^*_\rho/\{\pm 1\} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[d, equal] & \\
& \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} \arrow[d, equal] & \mathcal{M}(0) \arrow[l, "\simeq"'] \\
\mathcal{N}^*_\sigma/\{\pm 1\} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \ , &
\end{tikzcd}
$$

de sorte qu'on trouve des décompositions

$$
(131) \qquad
\begin{cases}
\mathcal{N}^*_\rho/\{\pm 1\} \ \simeq \ \Upsilon_{\rho,\sigma} \cdot \underbrace{SZ_\rho/\{\pm 1\}}_{= L_\rho/\{\pm 1\} \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}} \\
\mathcal{N}^*_\sigma/\{\pm 1\} \ \simeq \ \Upsilon_{\rho,\sigma} \cdot \underbrace{SZ_\sigma/\{\pm 1\}}_{= L_\sigma/\{\pm 1\} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}
\end{cases}
$$

(produits semi-directs). L'opération de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ sur $L_\rho/\{\pm 1\} \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ est donnée par le caractère quadratique ε_3, celle sur $L_\sigma/\{\pm 1\} \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est donnée par le caracatère quadratique ε_2.

La symétrie de présentation des deux homomorphismes (130) est un peu bidon – p.ex. l'homomorphisme $\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} = \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow \mathcal{N}^*_\sigma/\{\pm 1\}$ se remonte de façon évidente en

$$
(132) \qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} = \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \mathcal{N}^*_\sigma \\
\mathcal{M}(0) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, hook] & \mathcal{M}[0] = Z^! \ . \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Une autre façon de le voir est de noter que

$$
(132) \qquad \Upsilon_{\rho,\sigma} \ \simeq \ \mathcal{M}^!_0[0]/L_0^{\pi_0} \qquad [^{99}] \ ,
$$

où

$$\mathcal{M}_0^![0] \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}_0(0)\cdot L_0^{\pi_0} \underbrace{\hookrightarrow}_{\substack{\text{sous-groupe}\\ \text{d'indice 2}}} \mathcal{M}^![0] \;=\; \mathcal{M}(0)\cdot L_0^{\pi_0}\;;$$

or sur $L_0^{\pi_0}$, l'homomorphisme induit par

$$\mathcal{M}^![0] \;=\; Z^!_{\rho,\sigma} \longrightarrow \mathcal{N}^*_\sigma$$

est trivial. Ainsi on a même un scindage de

(133) $$1 \longrightarrow L_\sigma \longrightarrow \mathcal{N}^*_\sigma \longrightarrow \underbrace{\Upsilon_{\rho,\sigma}}_{\simeq \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim}} \longrightarrow 1$$

en un produit semi-direct

$$\mathcal{N}^*_\sigma \;\simeq\; \Upsilon_{\rho,\sigma}\cdot L_\sigma\;,$$

qu'il vaut mieux écrire en caractérisant le sous-groupe section en tant que sous-groupe de $G_{\rho,\sigma} \simeq \mathcal{M}$, soit donc

(134) $$\begin{aligned} & \mathcal{N}^{!\,*}_{0\,\sigma} \\ \overset{\text{def}}{=}\; & \mathrm{Im}(\mathcal{M}_0[0] \longrightarrow \mathcal{N}^*_\rho) \\ =\; & \mathrm{Im}(\mathcal{M}[0] \longrightarrow \mathcal{N}^*_\rho) \qquad\qquad (^{101}) \\ =\; & \{\beta^{-1}u \mid u \in \mathcal{M}(0),\ \beta \in \pi_0^\wedge \text{ tels que } u(\sigma) = \varepsilon_2(u)\,\mathrm{int}(\beta)(\sigma)\} \\ =\; & \{v \in \mathcal{N}^*_\sigma \mid \exists\, \beta \in \pi_0^\wedge \text{ tel que } \beta v \in \mathcal{M}[0] = \mathrm{Norm}_{\mathcal{M}}(L_0) \cap \mathcal{M}\,[^{100}]\}\;. \end{aligned}$$

Posant

(135) $$\mathcal{M}_0^! \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}(0)\cdot \pi_0 \underbrace{\subseteq}_{\text{indice 2}} \mathcal{M}^! \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}(0)\cdot\pi\;,$$

`[page 612]`

de sorte qu'on a

(136) $$\mathcal{M}^! \simeq \mathcal{M}_0^! \times \mu \qquad (^{102})\;,$$

on a donc

(137) $$\begin{cases} \mathcal{N}^{*\,!}_{\sigma\,0} & = \;\; \mathcal{N}^*_\sigma \cap \mathcal{M}^!_0 \\ \mathcal{N}^{*\,!}_{\sigma} & \overset{\text{def}}{=} \;\; \mathcal{N}^*_\sigma \cap \mathcal{M}^! \;\;=\;\; \mathcal{N}^{*\,!}_{\sigma\,0} \times \mu\;, \end{cases}$$

[99] `[Deux fois (132).]`

[100] `[Il est possible qu'il manque quelque chose ici.]`

[101] **NB** On définit $\mathcal{M}^!$ comme l'image inverse de $\mathcal{M}^!_{0,\widetilde{3}}$, i.e. le noyau de la représentation canonique

$$\mathcal{M} \longrightarrow \underbrace{\mathfrak{S}^{+\,\wedge}/\pi^\wedge}_{\simeq\,\mathfrak{S}_3} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^{+\,\wedge}/\pi^\wedge)\;.$$

[102] **NB** On a $\mathcal{M}^!_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^!_{0,\widetilde{3}}$.

et on trouve que

$$\mathcal{N}^{*\,!}_{\sigma\,0} \xrightarrow{\sim} \Upsilon_{\rho,\sigma} \;=\; \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}\ . \tag{138}$$

Posons pour abréger

$$\mathcal{M}(1/2) \;=\; \mathcal{N}^{*\,!}_{\sigma\,0}\ , \qquad \text{cf. (137)}\ , \tag{139}$$

on aura donc que $\mathcal{M}(1/2)$ est un groupe-section pour $\mathcal{N}^{*}_{\sigma}$, extension de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ par L_σ, et a fortiori pour $\mathcal{M}$, extension de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ par $\mathfrak{S}^{+\wedge}$, et en même temps pour $\mathcal{M}^!_0$, $\mathcal{M}^!$.

$$\begin{cases} \mathcal{M}^!_0 \;\simeq\; \mathcal{M}(1/2)\cdot \pi^{\wedge}_0 \qquad (^{103}) \\ \mathcal{M}^! \;\simeq\; \mathcal{M}(1/2)\cdot \pi^{\wedge} \\ \mathcal{M} \;\simeq\; \mathcal{M}(1/2)\cdot \mathfrak{S}^{+\wedge} \\ \mathcal{N}^{*}_{\sigma} \;\simeq\; \mathcal{M}(1/2)\cdot L_\sigma \end{cases} \tag{140}$$

[Si on veut paraphraser en introduisant

$$\mathcal{N}^{*\,!}_{\rho\,0} \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \mathcal{N}^{*}_{\rho} \cap \mathcal{M}^!_0 \;=\; \{v \in \mathcal{N}^{*}_{\rho} \mid \exists\, \alpha \in \pi^{\wedge}_0 \text{ tel que } \underbrace{\alpha v}_{=\,u} \in \mathcal{M}(0)\}\ , \tag{141}$$

c'est donc l'ensemble des v qu'on peut associer à des $u \in \mathcal{M}(0) \subseteq \mathcal{M}^![0] \simeq Z^!_{\rho,\sigma}$, à l'aide de $\alpha \in \pi^{\wedge}_0$ tel que $\alpha^{-1}u \in \mathcal{N}^{*}_{\rho}$, i.e.

$$u(\rho) \;=\; \mathrm{int}(\alpha)(\rho^{\varepsilon_3})\ , \qquad \text{où } \varepsilon_3 = \varepsilon_3(u) = \varepsilon_3(v)\ .$$

Mais comme $u(\rho)$ doit avoir même image dans $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathfrak{S}^{+\wedge}/\pi^{\wedge}$ que ρ, il faut qu'on ait $\varepsilon_3 = 1$, et alors α est l'élément $\underline{\alpha}(u)$ associé à u, et $v = \alpha^{-1}u$ est l'image canonique de u dans $\mathcal{N}^{*}_{\rho}$. Ainsi on trouve :

Proposition : *L'homomorphisme* $\mathcal{N}^{*\,!}_{\rho\,0} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \;=\; \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ *est injectif, et a pour image* $\Upsilon'_{\rho,\sigma} = \{\gamma \in \Upsilon_{\rho,\sigma} \mid \varepsilon_3(\gamma) = 1\}$.

Corollaire. $\mathcal{N}^{*\,!}_{\rho\,0} \subseteq Z^!_{\rho}$, i.e. $\mathcal{N}^{*\,!}_{\rho\,0} = Z^!_{0\,\rho} \stackrel{\text{def}}{=} Z_\rho \cap \mathcal{M}^!_0$.

Il est naturel de poser

$$\mathcal{N}^{*\,!}_{\rho\,0} \;=\; Z^!_{0\,\rho} \;=\; \mathcal{M}(-\overline{\jmath})\ . \tag{142}$$

Comme $\mathcal{N}^{*\,!}_{\rho} \supseteq Z^!_{\rho} \supseteq \mu$, on voit que l'on a

$$\begin{cases} \mathcal{N}^{*\,!}_{\rho} \;=\; \mathcal{N}^{*\,!}_{\rho\,0} \times \mu \qquad (\text{donc } \mathcal{N}^{*\,!}_{\rho} = Z^!_{\rho}) \\ \quad \| \\ Z^!_{\rho} \;=\; Z^!_{\rho\,0} \times \mu \end{cases} \qquad [^{104}]\ . \tag{142}$$

[103] Attention, $\mathcal{M}^!$ est invariant dans $\mathcal{M}$, et $\mathcal{M}^!_0$ est invariant dans $\mathcal{M}^!$, mais *non dans* $\mathcal{M}$, cf. plus bas.

Le sous-groupe $Z^!_{0,\rho} = \mathcal{M}(-\bar{\jmath})$ est une section de $\mathcal{M}'$ sur $\Upsilon'_{\rho,\sigma} \simeq \mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}}$, et étant contenu dans $\mathcal{M}'^!_0$, $\mathcal{M}'^!$, $\mathcal{M}'$, $Z^!_\rho$, Z_ρ, on aura des décompositions en produits semi-directs

$$(143) \qquad \begin{cases} \mathcal{M}'^!_0 & \simeq \quad \mathcal{M}(-\bar{\jmath}) \cdot \pi_0 \\ \mathcal{M}'^! & \simeq \quad \mathcal{M}(-\bar{\jmath}) \cdot \pi \\ \mathcal{M}' & \simeq \quad \mathcal{M}(-\bar{\jmath}) \cdot \mathfrak{S} \\ Z^!_\rho & \simeq \quad \mathcal{M}(-\bar{\jmath}) \times \mu \\ Z_\rho & \simeq \quad \mathcal{M}(-\bar{\jmath}) \times L_\rho \quad \ldots \quad] \end{cases}$$

[page 613]

Revenons au diagramme (130), je dis que l'homomorphisme

$$\underbrace{\Upsilon_{\rho,\sigma};}_{=\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}} \longrightarrow \mathcal{N}^*_\rho/\{\pm 1\}$$

ne se relève pas en un homomorphisme de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ dans $\mathcal{N}^*_\rho$ – en d'autres termes, que l'extension $\Upsilon^{\sim}_{\rho,\sigma}$ de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ par $\{\pm 1\} = \mu$ qu'elle définit n'est pas triviale. Pour identifier cette extension, considérons le diagramme

$$(144) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}^![0] \ = \ Z^!_{\rho,\sigma} \arrow[rr, "\text{can.}"] & & \Upsilon_{\rho,\sigma} \ = \ Z^!_{\rho,\sigma}/L^\pi_0 \arrow[r, "\text{hom. (130)}"] & \mathcal{N}^*_\rho/\{\pm 1\} \\ S_0\Gamma^!_{\rho,\sigma} \arrow[u, "{\text{can., } (u,a,b) \mapsto u}"'] & S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \text{ (sans }^!) \arrow[ur, "\text{can. (passage au quotient)}"'] & & \\ S^\pi_0\Gamma^!_{\rho,\sigma} \arrow[u, hook, "\text{incl.}"'] \arrow[ur, hook, dotted, "\text{incl.}"'] \arrow[rrr] & & & \mathcal{N}^*_\rho \arrow[uu] \end{tikzcd} ,$$

qui montre que l'on a un diagramme de carrés cartésiens

$$(145) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}(0) \arrow[r, hook] & \mathcal{M}^![0] = Z^!_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\text{épi}"] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r, hook] & \mathcal{N}^*_\rho/\{\pm 1\} \\ \mathcal{M}(0)^{\sim} \arrow[u] \arrow[r, hook] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{I}"] & S^\pi_0\Gamma^!_{\rho,\sigma} \arrow[u, "2"'] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{II}"] & \Upsilon^{\sim}_{\rho,\sigma} \arrow[u, "2"'] \arrow[r, hook] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{III}"] & \mathcal{N}^*_\rho \arrow[u, "2"'] \end{tikzcd} ,$$

où $\mathcal{M}(0)^{\sim}$ est défini comme l'extension de $\mathcal{M}(0)$ par μ induite par l'extension $S^\pi_0\Gamma^!_{\rho,\sigma}$ de $\mathcal{M}^![0]$, qui s'identifie donc aussi à l'image inverse de l'extension $\Upsilon^{\sim}_{\rho,\sigma}$ de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ par μ, par l'isomorphisme composé $\mathcal{M}(0) \xrightarrow{\sim} \Upsilon_{\rho,\sigma}$. Donc l'extension $\Upsilon^{\sim}_{\rho,\sigma}$ de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ par μ s'identifie

[104] [Deux fois (142).]

essentiellement à l'extension $\mathcal{M}(0)^{\sim}$ de $\mathcal{M}(0)$ par μ, dont on s'est convaincu plus au moins qu'elle n'était pas triviale.

Voici une autre façon d'obtenir l'homomorphisme canonique $\Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow \mathcal{N}_\rho^*/\pm 1$, et l'extension $\Upsilon_{\rho,\sigma}^{\sim}$ de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$. Considérons

(146) $$\mathcal{N}_\rho^{*\,!} \;=\; \mathcal{N}_\rho^* \cap \mathcal{M}^! \,.$$

On a alors

(147) $$\mathcal{N}_\rho^{*\,!} \cap \mathfrak{S}^+ \;=\; \mathrm{Ker}(\mathcal{N}_\rho^{*\,!} \longrightarrow \underbrace{\Upsilon_{\rho,\sigma}}_{\simeq \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim}}) \;=\; L_\rho \cap \pi \;=\; \mu \;,$$

d'autre part l'homomorphisme

(148) $$\mathcal{N}_\rho^{*\,!} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \qquad \text{est } \textit{épimorphique} \,.$$

Car il suffit de voir que pour tout $u \in \mathcal{M}(0)$ il existe un élément de $\mathcal{N}_\rho^{*\,!}$ qui lui est congru modulo $\mathfrak{S}$. Or on a $u(\rho) = \mathrm{int}(\alpha)(\rho)$ avec $\alpha \in \pi_\tau^\wedge = \{1,\tau\}\cdot\pi^\wedge$. Si $\varepsilon_3(u) = 1$, i.e. $\alpha \in \pi^\wedge$, $\alpha^{-1}u \in Z_\rho \subseteq \mathcal{N}_\rho^*$ fait l'affaire. Si $\varepsilon_3 = -1$, on aura

$$\alpha \;=\; \alpha_0\tau \;, \qquad \alpha_0 \;\in\; \pi^\wedge \;,$$

et on a

$$u(\rho) = \alpha(\rho) \;=\; \alpha_0(\underbrace{\tau(\rho)}_{=\sigma(\rho^{-1})}) \;=\; \alpha_0(\sigma(\rho^{-1})) \;,$$

donc

$$(\sigma^{-1}\alpha_0^{-1}u)(\rho) \;=\; \rho^{-1} \;,$$

donc $\sigma^{-1}\alpha_0^{-1}u \in \mathcal{N}_\rho^*$, OK.

`[page 614]`

Donc on a une suite exacte

(149) $$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \underbrace{Z_\rho^{*\,!}}_{\simeq \Upsilon_{\rho,\sigma}^{\sim}} \longrightarrow \underbrace{\Upsilon_{\rho,\sigma}}_{\simeq \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim}} \longrightarrow 1 \;,$$

qui fait de $Z_\rho^{*\,!}$ une μ-extension de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$, d'où un homomorphisme canonique

$$\Upsilon_{\rho,\sigma} \;\simeq\; Z_\rho^{*\,!}/\mu \longrightarrow \mathcal{N}_\rho^*/\mu \;,$$

qui, bien entendu, n'est autre que le premier homomorphisme (130).

9°) Récapitulation sur le cas universel.

Finalement, j'ai l'impression que j'ai fait encore des larges détours et contorsions, pour finalement me perdre dans les sables, et perdre un peu le fil. Je vais donc récapituler ce qui me semble essentiel.

a

(1) $Z_{\rho,\sigma} \;\simeq\; \mathcal{M}(0)\cdot L_0^{\mathfrak{S}} \;=\; \mathcal{M}[0]$ (opérant sur $\mathfrak{S}^{+\wedge}$ par opération induite par l'adjoint).

On distingue dedans un sous-groupe d'indice 2

(2) $$Z^!_{\rho,\sigma} \;\simeq\; \mathcal{M}(0)\cdot L_0^{\pi}\ .$$

On a

(3) $$G_{\rho,\sigma} \;\simeq\; \mathcal{M}\ ,$$

et, plus précisément, le diagramme

(4) $$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & L_0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & Z_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathfrak{S}^{+\wedge} \arrow[r] & G_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

s'identifie au diagramme

(4 bis) $$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & L_0^{\mathfrak{S}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \overbrace{\mathcal{M}[0]}^{\mathcal{M}(0)\cdot L_0^{\mathfrak{S}}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathfrak{S}^{+\wedge} \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} \arrow[r] & 1\ .
\end{tikzcd}$$

D'ailleurs, les homomorphismes

(5) $$\begin{tikzcd}
& \mu \\
\Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[ur, "\varepsilon'_{\Upsilon}=\varepsilon^{\rho}_{\Upsilon}"] \arrow[r] \arrow[dr, "\varepsilon''_{\Upsilon}=\varepsilon^{\sigma}_{\Upsilon}"'] & \hat{\mathbf{Z}}^* \\
& \mu
\end{tikzcd}$$

s'identifient à

(5 bis) $$\begin{tikzcd}
& & \mu \\
\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} \arrow[urr, "\varepsilon_3"] \arrow[r, "\chi"] \arrow[drr, "\varepsilon_2"'] & \hat{\mathbf{Z}}^* \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & \mu\ .
\end{tikzcd}$$

b On a

(6) $$\mathcal{N}^*_{\sigma} \;=\; \{u\in\mathcal{M} \mid u(\sigma) \;=\; \sigma^{\varepsilon_2(u)}\ \ (\,=\varepsilon_2(u)\cdot\sigma=\varepsilon_2[\tau](\sigma)=\varepsilon_2[\tau'](\sigma)\ )\}$$

et

(7) $$\begin{cases}
\mathcal{N}^*_{\sigma}\cap\mathfrak{S}^{\wedge} & = \ D_{\sigma} \;=\; \{1,\tau\}\cdot L_{\sigma} \;=\; \{1,\tau'\}\cdot L_{\sigma} \\
\mathcal{N}^*_{\sigma}\cap\mathfrak{S}^{+\wedge} & = \ L_{\sigma} \qquad (\,\simeq\ \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}\ ) \\
\mathcal{N}^*_{\sigma}\cap\pi & = \ \mu \\
\mathcal{N}^*_{\sigma}\cap\pi_0 & = \ \{1\}\ .
\end{cases}$$

[page 615]

Posons

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathcal{M}_0^! \;=\; \mathcal{M}(0)\cdot\pi_0 \;\subseteq\; \mathcal{M}^! \;=\; \mathcal{M}(0)\cdot\pi \;=\; \mathrm{Ker}(\mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{S}_3)\ , \\ \text{de sorte que } \ \mathcal{M}^! \;\simeq\; \mathcal{M}_0^! \times \mu \end{cases}$$

et

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathcal{M}(1/2) \;\overset{\text{def}}{=}\; \mathcal{N}_{\sigma\,0}^{*\,!} \;\overset{\text{def}}{=}\; \mathcal{N}_\sigma^* \cap \mathcal{M}_0^! \\ \mathcal{N}_\sigma^{*\,!} \;=\; \mathcal{N}_\sigma^* \cap \mathcal{M}^!\ , \end{cases}$$

alors l'homomorphisme $\mathcal{M} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$ induit un *isomorphisme*

$$(10)\qquad \mathcal{M}(1/2) \;=\; \mathcal{N}_{\sigma\,0}^{*\,!} \xrightarrow{\ \sim\ } \Upsilon_{\rho,\sigma}\ ,$$

donc on a des scindages en produits semi-directs

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathcal{M} & \simeq & \mathcal{M}(1/2)\cdot\mathfrak{S}^{+\wedge} \\ \mathcal{M}^! & \simeq & \mathcal{M}(1/2)\cdot\pi \\ \mathcal{M}_0^! & \simeq & \mathcal{M}(1/2)\cdot\pi_0 \\ \mathcal{N}_\sigma^{*\,!} & \simeq & \mathcal{M}(1/2)\cdot\mu \\ \mathcal{N}_\sigma^* & \simeq & \mathcal{M}(1/2)\cdot L_\sigma\ , \end{cases}$$

et

$$(12)\qquad \Upsilon_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{M}(1/2) \;=\; \mathcal{N}_\sigma^{*\,!} \hookrightarrow \mathcal{N}_\sigma^*\ .$$

c On a

$$(13)\qquad \mathcal{N}_\rho^* \;=\; \{u \in \mathcal{M} \mid u(\rho) \;=\; \rho^{\varepsilon_3(u)} \quad (\,=\varepsilon_3[\tau'](\rho)\,)\}$$

et

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathcal{N}_\rho^* \cap \mathfrak{S}^\wedge & = & D_\rho \;=\; \{1,\tau'\}\cdot L_\rho \\ \mathcal{N}_\rho^* \cap \mathfrak{S} & = & L_\rho \qquad (\,\simeq\ \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}\,) \\ \mathcal{N}_\rho^* \cap \pi & = & \mu \\ \mathcal{N}_\rho^* \cap \pi_0 & = & \{1\}\ . \end{cases}$$

Soient

$$(15)\qquad \mathcal{N}_{\rho\,0}^{*\,!} \;\overset{\text{def}}{=}\; \mathcal{N}_\rho^* \cap \mathcal{M}_0^!\ , \qquad \mathcal{N}_\rho^{*\,!} \;\overset{\text{def}}{=}\; \mathcal{N}_\rho^* \cap \mathcal{M}^!\ ;$$

on trouve

$$(16)\qquad \mathcal{N}_{\rho\,0}^{*\,!} \;\subseteq\; Z_\rho \;=\; \mathrm{Centr}_{\mathcal{M}}(\rho) \;=\; \mathrm{Centr}_{\mathcal{M}}(L_\rho)\ ,$$

et on note aussi

$$\mathcal{N}^{*!}_{\rho 0} \; = \; Z^{!}_{\rho 0} \; = \; \mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \; . \tag{17}$$

On voit que l'homomorphisme $\mathcal{M} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} = \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ induit un *isomorphisme*

$$\mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \; = \; Z^{!}_{\rho,0} \xrightarrow{\sim} \underbrace{\Upsilon'_{\rho,\sigma}}_{\overset{\text{def}}{=} \{\gamma \in \Upsilon_{\rho,\sigma} \mid \varepsilon_3(\gamma)=1\}} \; = \; \Gamma^{\sim}_{\mathbf{Q}} \; , \tag{18}$$

d'où on déduit un scindage en produits semi-directs (voire produits directs)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}' & \simeq & \mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \cdot \mathfrak{S}^{+\wedge} \\ \mathcal{M}'^{!} & \simeq & \mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \cdot \pi \\ \mathcal{M}'^{!}_{0} & \simeq & \mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \cdot \pi_0 \\ Z^{!}_{\rho} \; = \; \mathcal{N}^{*!}_{\rho} & \simeq & \mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \times \mu \\ Z_{\rho} & \simeq & \mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \times L_{\rho} \; . \end{array} \right. \tag{19}$$

[page 616]

Soit maintenant

$$\mu_{\tau'} \; = \; \{1, \tau'\} \; \subseteq \; \mathfrak{S}^{\wedge} \; , \tag{20}$$

alors $\mu_{\tau'}$ normalise L_ρ, car

$$\tau'(\rho) \; = \; \rho^{-1} \; , \qquad \text{d'où} \qquad \tau'(L_\rho) \; = \; L_\rho \; ,$$

donc il normalise $Z_\rho = \mathrm{Cent}_{\mathcal{M}}(L_\rho)$, donc aussi $Z^{!}_{\rho} = Z_\rho \cap \mathcal{M}^{!}$ (puisque $\mathcal{M}^{!}$ est invariant dans $\mathcal{M}$) $= Z^{!}_{\rho,0} \times \mu = \mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \times \mu$. D'ailleurs $\mu_{\tau'} \cap Z^{!}_{\rho} = \mu_{\tau'} \cap \mathcal{M}^{!} = \{1\}$. Soit

$$\mathcal{N}^{?}_{\rho} \; = \; \mu_{\tau'} \cdot Z^{!}_{\rho} \; = \; \underbrace{\mu_{\tau'} \cdot (\underbrace{Z^{!}_{\rho 0} \times \mu}_{\simeq \mathcal{M}(-\bar{\jmath}) \times \mu \simeq \mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}} \times \mu})}_{\text{(produit semi-direct)}} \; . \tag{21}$$

On fera attention que contrairement à ce que pourrait suggérer cette écriture, $\mu_{\tau'}$ ne normalise *pas* $Z^{!}_{\rho,0}$ – sinon on aurait une décomposition en produit $\mathcal{N}^{?}_{\rho} = \mathcal{N}^{?}_{\rho 0}$, où $\mathcal{N}^{?}_{\rho,0} = \mu_{\tau'} \cdot Z^{?}_{\rho,\sigma}$, or il n'en est rien. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \mathcal{N}^{?}_{\rho} \longrightarrow \underbrace{\Upsilon_{\rho,\sigma}}_{= \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}} \longrightarrow 1 \; , \tag{22}$$

de sorte que $\mathcal{N}^{?}_{\rho}$ est une quasi-section de multiplicité 2 de l'extension $\mathcal{N}^{*}_{\rho} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$, ou de $\mathcal{M} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} = \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}$. Ainsi on trouve

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M} & = & \mathcal{N}^{?}_{\rho} \wedge_{\boldsymbol{\mu}_2} \mathfrak{S}^{+\wedge} \\ \mathcal{N}_{\rho} & = & \mathcal{N}^{?}_{\rho} \wedge_{\boldsymbol{\mu}_2} L_{\rho} \; \simeq \; \mathcal{N}^{?}_{\rho} \times \underbrace{L_{-\rho}}_{\simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}} \end{array} \right. \; . \tag{23}$$

L'extension (22) de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ par μ est l'extension notée $\Upsilon^{\sim}_{\rho,\sigma}$ dans la section précédente, elle est sûrement non scindée. Elle donne naissance à un homomorphisme canonique

$$\Upsilon_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}^{?}_{\rho}/\mu \longrightarrow \mathcal{N}^{*}_{\rho}/\mu \,. \tag{24}$$

Remarque. Pour bien faire, il faudrait expliciter l'opération de τ' sur

$$Z^{!}_{\rho} \;\simeq\; Z^{!}_{\rho 0} \times \mu \xrightarrow{\sim} \mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}} \times \mu \,,$$

en termes de l'opération de l'image $\tau_{\mathbf{\Gamma}}$ de τ' sur $\mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ par automorphisme intérieur (NB $\tau_{\mathbf{\Gamma}}$ n'est autre que l'élément de $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}} \subseteq \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ 'conjugaison complexe') et d'un homomorphisme de $\mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ dans μ, i.e. d'un 'caractère quadratique' de $\mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ – il y a fort à parier que celui-ci est justement ε_2 – de sorte que $\mathbf{\Gamma}^{0\sim}_{\mathbf{Q}} \simeq \mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{\Gamma}''^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ apparaît comme invariant par τ' ... En somme, il y aurait lieu de reprendre l'étude de l'extension faite dans la section précédente, en y partant du point de vue des α, β associés,

[page 617]

dans l'optique actuelle, sans doute plus simple. Il y aurait lieu en même temps d'expliciter une autre section partielle, qui serait au dessus de

$$\mathbf{\Gamma}'''^{\sim}_{\mathbf{Q}} \;=\; \{x \in \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} \mid \varepsilon_2(x)\varepsilon_3(x) = 1\} \,,$$

et qui mériterait peut-être la notation $\mathcal{M}(\sqrt{3})$ ou du moins $\mathcal{M}(q)$, pour un générateur q convenable de $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$??? ([105]).

Je me rends compte que je suis en train de déconner – ayant un peu perdu contact avec le contenu géométrique de mes calculs. Il faut garder à l'esprit que

$$\mathcal{M}^{!}_{0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{!\sim}_{0,3} \tag{25}$$

correspond, au $^{\sim}$ près, au π_1 de $\mathcal{U}_{0,3\,\mathbf{Q}}$, les section de $\mathcal{M}^{!}_{0} \longrightarrow \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} \simeq \Upsilon_{\rho,\sigma}$ correspondent donc (au $^{\sim}$ près) à celles de $\pi_1(\mathcal{U}_{0,3\,\mathbf{Q}})$ sur $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}$, donc ('moralement') aux points rationnels sur $\mathbf{Q}$ de $\mathcal{U}_{0,3\,\mathbf{Q}}$ – quand ce sont des sections partielles, aux points de $\mathcal{U}_{0,3\,\mathbf{Q}}$ à valeurs dans des extensions finies de $\mathbf{Q}$. Ainsi, la section envisagé dans b) correspond bien au point $1/2$ de $\mathcal{U}_{0,3\,\mathbf{Q}}$, la section partielle $\mathcal{M}(-\jmath)$ envisagée ici dans c) correspond au point $-\jmath$ de $\mathcal{U}_{0,3\,\mathbf{Q}}$, qui est dans $\mathcal{U}_{0,3}(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{1}))$, donc la notation $\mathcal{M}(-\jmath)$ est raisonnable. Quant à $\mathcal{N}^{\sim}_{\rho}$, il n'est *pas* $\subseteq \mathcal{M}^{!}_{0}$ –même en divisant par μ ; on trouve après division par μ une section de $\mathcal{M}^{\sim}_{0,3}$ sur $\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}$, mais ce n'est pas une section de $\mathcal{M}^{!\sim}_{0,3}$. Or au $^{\sim}$ près, $\mathcal{M}^{\sim}_{0,3}$ est le π_1 de $\mathbf{M}'_{1,1\,\mathbf{Q}}$, schéma modulaire sur $\mathbf{Q}$ des courbes elliptiques *modulo symétrie.* Donc la donnée de cette section correspond à la donnée d'une telle 'courbe elliptique modulo symétrie' sur $\mathbf{Q}$. Passant au sous-groupe $\mathbf{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ – ce qui correspond à l'extension de corps de base de $\mathbf{Q}$ à $\mathbf{Q}(\jmath) = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{1})$ – on retrouve l'image dans $\mathcal{M}^{!\sim}_{0,3}$ de la section partielle précédente $\mathcal{M}(-\jmath)$ – cela montre donc qu'il s'agit toujours de la 'même' courbe elliptique. J'ai bien l'impression cependant que sur $\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ tout entier, cette section de $\mathcal{M}^{\sim}_{0,3}$ ne peut se remonter en une section de $\mathcal{M}$ sur $\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ – i.e. justement que l'extension $\mathcal{N}^{?}_{\rho}$ de $\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}$ par μ est non triviale. Cela signifierait-t-il qu'il n'existe pas de courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ d'invariant 0 ? (Chose qui semble absurde – on doit pouvoir *sur un corps* trouver n'importe quel

[105]? *Mérite un examen attentif.*

invariant … ([106])). De façon précise, on a le diagramme de schémas modulaires sur $\mathbf{Q}$

(26)
$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\text{\small schéma modulaire des courbes elliptiques}\ \mathbf{M}_{1,1} \arrow[d, "\text{\small gerbe de groupe } \mu"'] \arrow[dr] & \\
\text{\small schéma modulaire des courbes elliptiques modulo symétrie}\ \mathbf{M}'_{1,1} \arrow[r] & \mathbf{E}'\ \text{\small schéma modulaire grossier}
\end{tikzcd} ,$$

le fait qu'un point de $\mathbf{M}'_{1,1}(\mathbf{Q})$ ne se remonte

`[page 618]`

pas en un point de $\mathbf{M}_{1,1}$, ne signifie pas que son image dans $\mathbf{E}'$ ne se remonte pas à $\mathbf{M}_{1,1}$. De façon précise, le diagramme s'identifie à

(27)
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M}_{1,1} \ \simeq\ (\mathcal{U}_{0,3}, \tilde{\mathfrak{S}}_3) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbf{M}'_{1,1} \ \simeq (\mathcal{U}_{0,3}, \mathfrak{S}_3) \arrow[r] & \mathcal{U}_{0,3}/\mathfrak{S}_3 \ \simeq\ \mathcal{U}_{0,3}/\tilde{\mathfrak{S}}_3 \ \simeq\ \mathbf{E}'
\end{tikzcd} ,$$

où $\tilde{\mathfrak{S}}_3$ est l'extension de $\mathfrak{S}_3 = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ par μ, définie par

(28)
$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{S}}_3 \ &=\ \mathfrak{S}^+/\pi_0 \\
&\simeq\ \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})/(\text{sous-groupe invariante engendré par } -l_0) \\
&\simeq\ \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \Big/ \left(\begin{array}{l} \text{sous-groupe invariante (d'ordre 4) engendré par } -l_0, \\ \text{i.e. sous-groupe engendré par } -l_0,\ -l_1 \end{array} \right) ,
\end{aligned}$$

en faisant opérer $\tilde{\mathfrak{S}}_3$ sur $\mathcal{U}_{0,3}$ par l'intermédiaire de $\mathfrak{S}_3$. Un point de $\mathbf{M}'_{1,1}$ rationnel sur $\mathbf{Q}$ s'identifie donc à un $\mathfrak{S}_3$-torseur T sur $\mathbf{Q}$, muni d'un morphisme

(29)
$$T \longrightarrow \mathcal{U}_{0,3}$$

compatible avec les actions de $\mathfrak{S}_3$, un point de $\mathbf{M}_{1,1}$ s'identifie à un $\tilde{\mathfrak{S}}_3$-torseur $\tilde{T}$ sur $\mathbf{Q}$, muni d'un morphisme

(30)
$$\tilde{T} \longrightarrow \mathcal{U}_{0,3}$$

compatible avec l'opération de $\tilde{\mathfrak{S}}_3$ ([107]). Désignant par

$$T \ =\ \tilde{T}/\mu$$

le $\mathfrak{S}_3$-torseur correspondant, la donnée de (30) équivaut à la donnée de (29). Donc les relèvements à $\mathbf{M}_{1,1}$ d'un point de $\mathbf{M}'_{1,1}$ rationnel sur $\mathbf{Q}$ s'identifient aux $\tilde{\mathfrak{S}}_3$-torseurs $\tilde{T}$ qui relèvent le $\mathfrak{S}_3$-torseur T, i.e. (à isomorphisme près) ils correspondent aux homomorphismes $\mathbf{\Gamma_Q} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{S}}_3$ qui relèvent l'homomorphisme $\mathbf{\Gamma_Q} \longrightarrow \mathfrak{S}_3$ qui définit T ([108]) :

[106]?

[107]T est le torseur sur $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ des (pré)rigidifications de Jacobi d'échelon 2, $\tilde{T}$ celui des 'pré-rigidifications de Jacobi d'échelon 2 précisées' (le premier est défini pour une courbe elliptique modulo symétrie, le deuxième seulement pour une vraie courbe elliptique.)

[108]On suppose maintenant choisi un point de $T(\bar{\mathbf{Q}})$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{\mathfrak{S}}_3 \arrow[d] \\ \mathbf{\Gamma_Q} \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathfrak{S}_3 \ ; \end{tikzcd}$$

l'obstruction est, comme il se doit, une extension de $\mathbf{\Gamma_Q}$ par $\boldsymbol{\mu}_2$, i.e. un élément de $H^2(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\mu}_2) \simeq {}_2\mathrm{Br}(\mathbf{Q})$. Dans le cas qui nous occupe, l'image de T dans $\mathcal{U}_{0,3}$ est formée de $\{-\bar{\jmath}, -j\}$, qui est connexe sur $\mathbf{Q}$, sans doute $\mathbf{\Gamma_Q} \longrightarrow \mathfrak{S}_3$ est surjectif ([109]). De façon générale, dans la traduction galoisienne en termes de scindages de $\mathcal{M}_{0,3}$ sur $\mathbf{\Gamma_Q}$, l'homomorphisme $\mathbf{\Gamma_Q} \longrightarrow \mathfrak{S}_3$ est le composé

$$\mathbf{\Gamma_Q} \xrightarrow{k} \mathcal{M}_{0,3} \longrightarrow \mathfrak{S}_3 \ ,$$

qui est trivial si et seulement si k est une section de

$$\mathcal{M}^!_{0,3} \ = \ \mathrm{Ker}(\mathcal{M}_{0,3} \longrightarrow \mathfrak{S}_3)$$

sur $\mathbf{\Gamma_Q}$. Ici on a une section de $\mathcal{M}^!_{0,3}$ au dessus du sous-groupe $\mathbf{\Gamma}'_\mathbf{Q}$ d'indice 2, donc $k|\mathbf{\Gamma}'_\mathbf{Q} = 1$, donc $k(\mathbf{\Gamma_Q}) \subseteq \mathfrak{S}_3$ est d'ordre 2, on voit que

`[page 619]`

c'est le sous-groupe $\{1, \dot{\sigma}_\infty\}$ de $\mathfrak{S}_3$, car l'image de $\tau' = \sigma\tau \in \mathcal{M}_{0,3}$ dans $\mathfrak{S}_3$ est (comme celle de τ est 1) égale à celle de $\sigma = \sigma_\infty$, i.e. $\dot{\sigma}_\infty$. Cela signifie que l'on a

$$T \ \simeq \ T_0 \wedge_{\{1,\dot{\sigma}_\infty\}} \mathfrak{S}_3 \ ,$$

i.e. T est déduit d'un μ-torseur (i.e. d'une extension quadratique de $\mathbf{Q}$ – savoir justement $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{1}) = \mathbf{Q}(j)$) par extension du groupe d'opérateurs $\mu \longrightarrow \mathfrak{S}_3$ $(-1 \longmapsto \dot{\sigma}_\infty)$. Donc, prenant l'image inverse de $\mu = \{1, \dot{\sigma}_\infty\}$ dans $\tilde{\mathfrak{S}}_3$, on trouve une extension de μ par μ – ça ne peut guère être que $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$! ([110]) – que j'ai envie de noter $\mathcal{E}''$,

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \overbrace{\mathcal{E}''}^{\simeq \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}} \longrightarrow \mu \longrightarrow 1 \ ,$$

et le problème d'obstruction est de trouver un remontage

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}'' \arrow[r] & \mu \\ \mathbf{\Gamma_Q} \arrow[u, dotted] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(qui n'existe sûrement pas! ([111])) – donc l'obstruction s'interprète comme l'extension de $\mathbf{\Gamma_Q}$ par μ, image inverse de l'extension $\mathcal{E}''$. (Il faudrait regarder pourquoi, en termes

[109] Canulé, cf. rectification plus bas.

[110] Oui, c'est évident, puisque $\sigma = \sigma_\infty$ dans $\mathfrak{S}_3 = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})/\pi_0$ est bien d'ordre 4, donc $\mathcal{E}'' \simeq \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ canoniquement ...

[111] C'est évident en effet, grâce à $(\mathbf{\Gamma_Q})_{\mathrm{ab}} \simeq \hat{\mathbf{Z}}^* \supseteq \mathbf{Z}_3^*$, on a $(\mathbf{Z}_3^*)_4 \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, donc déjà sur $\mathbf{Z}_3^*$ ça ne se remonte pas.

classiques, cette obstruction est scindée, quand on passe au sous-groupe $\mathbf{\Gamma}'''_{\mathbf{Q}}$ correspondant au corps $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$).

Ainsi, le point $\mathbf{Q}$-rationnel envisagé de $\mathbf{M}'_{1,1}$ ne se remonte pas en un point $\mathbf{Q}$-rationnel de $\mathbf{M}_{1,1}$. Par contre, son image 0 dans $\mathbf{E}' \simeq \mathcal{U}_{0,3}/\mathfrak{S}_3$ doit bien se remonter – i.e. il doit bien exister un $\tilde{\mathfrak{S}}_3$-torseur $\tilde{P}$, et un $\tilde{\mathfrak{S}}_3$-homomorphisme

$$\tilde{P} \longrightarrow \mathcal{U}_{0,3}\ , \qquad \text{i.e.}\ \underbrace{P}_{=\tilde{P}/\mu} \longrightarrow \mathcal{U}_{0,3}\ .$$

Considérons en effet le sous-schéma

$$Q\ =\ \mathcal{U}_{0,3} \times_{\mathbf{E}'} \{0\}$$

image inverse de 0, soit

$$P_0\ =\ Q_{\text{réd}}\ .$$

C'est un sous-schema qui, sur un corps $K \supseteq \mathbf{Q}(j)$, est somme de deux points, et qui sur $\mathbf{Q}$ est connexe – c'est un schéma canoniquement isomorphe à Spec $\mathbf{Q}(-\bar{\jmath})$. Il est stable par $\mathfrak{S}_3$, qui y opère via

$$\mathfrak{S}_3 \xrightarrow{\text{sg}} \mu\ ,$$

et l'opération galoisienne de μ sur le $\mu_{\mathbf{Q}}$-torseur P_0.

`[page 620]`

Ainsi on a le diagramme

$$(31)\qquad \begin{tikzcd} \tilde{\mathfrak{S}}_3 \arrow[r, "\text{can.}"] & \mathfrak{S}_3 \arrow[r, "\text{sg}"] & \mu \\ & \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad (^{112})\ .$$

On voit alors que la catégorie des relèvements des points $\mathbf{Q}$-rationnels de $\mathbf{E}'$ en un point $\mathbf{Q}$-rationnel de $\mathbf{M}_{1,1}$ resp. $\mathbf{M}'_{1,1}$, est équivalente à celle des $\mathfrak{S}_3$-torseurs $\tilde{P}$ sur $\mathbf{Q}$, qui relèvent le μ-torseur P_0. On avait choisi un $P = T$ de façon particulièrement triviale, en utilisant le scindage

$$\mu \xrightarrow{\sim} \{1, \dot{\sigma}_\infty\} \hookrightarrow\ \mathfrak{S}_3$$

de $\mathfrak{S}_3 \longrightarrow \mu$ – mais le torseur T ne se remonte pas en un $\tilde{T}$. Les classes d'isomorphie de points de $\mathbf{M}'_{1,1}$ resp. de $\mathbf{M}_{1,1}$ au dessus du point 0 de $\mathbf{E}'$, correspondent de même aux classes de conjugaison (modulo noyau $\mathfrak{S}_3^+$ `[resp.]` $\tilde{\mathfrak{S}}_3^+$ de $\mathfrak{S}_3 \longrightarrow \mu$ `[resp.]` $\tilde{\mathfrak{S}}_3 \longrightarrow \mu$) de relèvements de $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mu$ en $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathfrak{S}_3$ resp. $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{S}}_3$.

Considérons un relèvement en

$$\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathfrak{S}_3\ ,$$

son image est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$, qui est soit $\{1, \dot{\sigma}_\infty\}$ ou un de ses conjugués $\{1, \dot{\sigma}_0\}$, $\{1, \dot{\sigma}_1\}$, *ou* c'est $\mathfrak{S}_3$ tout entier. Dans le premier cas, on a vu que ça ne se remonte pas en $\tilde{\mathfrak{S}}_3$. Donc pour pouvoir remonter, il faut prendre un *épimorphisme* $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathfrak{S}_3$ – on sort donc du contexte abélien sur $\mathbf{Q}$, pour entrer dans le domaine des extensions abéliennes de

[112]**NB** Le noyau de $\tilde{\mathfrak{S}}_3 \longrightarrow \mu$ est une extension centrale de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ par $\mu = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, elle est donc triviale et isomorphe à $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ (noyau engendré par ρ).

$\mathbf{Q}(j)$. Examiner en termes de groupes de Galois s'il existe un tel relèvement $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{S}}_3$, et comment les obtenir, apparaît comme un exercice plaisant et délectable de théorie des corps de classes, que je ne vais pas poursuivre pour le moment, pour ne pas éterniser cette digression. Revenant par la suite sur ce point, il me faudrait en même temps expliciter la relation entre les points de vue remontage d'homomorphismes de $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Q}}$, et scindage de l'extension $\mathcal{M}_{0,3}$ de $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Q}}$ par $\mathfrak{S}^{+\wedge}_{0,3}$, ou $\mathcal{M}$ de $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Q}}$ par $\mathfrak{S}^{+\wedge} \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^{\wedge}$.

`[page 621]`

Revenons au sous-groupe

$$\underbrace{\mathcal{N}^{?}_{\rho}}_{\overset{4}{\supseteq}\, \mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) = Z^{!}_{\rho\,0}} \overset{3}{\subseteq} \mathcal{N}^{*}_{\rho} \subseteq \mathcal{M}$$

contenant le sous-groupe section partielle $\mathcal{M}(-\bar{\jmath}) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\Gamma}'^{\sim}_{\mathbf{Q}}$. Soit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^0(-\bar{\jmath}) &\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}(\mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \xrightarrow{\varepsilon_2} \mu) \\ &= Z_\rho \cap \mathcal{M}''^{!}_{0} \\ &= \mathcal{N}^{*}_{\rho} \cap \mathcal{M}^{0\,!}_{0} \\ &\overset{2}{\subseteq} \mathcal{M}'(-\bar{\jmath})\ , \end{aligned} \tag{32}$$

qui est donc une section partielle au dessus de

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}^{0\sim}_{\mathbf{Q}} &= \mathrm{Ker}(\boldsymbol{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{(\varepsilon_2,\varepsilon_3)} \mu \times \mu) \\ &= \mathrm{Ker}(\boldsymbol{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \hat{\mathbf{Z}}^{*} \longrightarrow (\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^{*})\ . \end{aligned} \tag{33}$$

Modulo une vérification que je vais faire plus bas, τ' normalise $\mathcal{M}^0(-\bar{\jmath})$. Considérons alors

$$\mathcal{M}'''(-\bar{\jmath}) \overset{\mathrm{def}}{=} \underbrace{\mu_{\tau'} \cdot \mathcal{M}^0(-\bar{\jmath})}_{\text{(semi-direct)}}\ , \qquad \text{où } \mu_{\tau'} = \{1, \tau'\}\ , \tag{34}$$

c'est un sous-groupe d'indice 4 de $\mathcal{N}^{?}_{\rho}$, et on a maintenant

$$\mathcal{M}'''(-\bar{\jmath}) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\Gamma}'''^{\sim}_{\mathbf{Q}}\ , \tag{35}$$

c'est une section partielle au dessus de $\boldsymbol{\Gamma}'''^{\sim}_{\mathbf{Q}}$, d'où des isomorphismes

`[page 622]`

$$\begin{cases} \mathcal{M}''' \simeq \mathcal{M}'''(-\bar{\jmath}) \cdot \mathfrak{S}^{+\wedge} \\ \mathcal{N}^{*}_{\rho} \simeq \mathcal{M}'''(-\bar{\jmath}) \cdot L_\rho\ . \end{cases} \tag{36}$$

Diagramme récapitulatif des sous-groupes de $\mathcal{N}_\rho^*$ obtenus jusqu'à présent :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}^0(-\bar\jmath) \arrow[rr, hook, "2"] \arrow[dl, hook, "2"'] & & \underbrace{\mathcal{M}'(-\bar\jmath)}_{=Z^!_{\rho\,0}} \arrow[rr, hook, "2"] \arrow[dl, hook, "2"'] & & \mathcal{M}'(-\bar\jmath)\times\mu \arrow[rr, hook, "3"] \arrow[dl, hook, "2"'] & & Z_\rho \arrow[dl, hook, "2"'] \\
\mathcal{M}'''(-\bar\jmath) \arrow[rr, hook, "2"] & & \mathcal{M}'''(-\bar\jmath)\times\mu \arrow[ul] \arrow[rr, hook, "2"] & & \mathcal{N}_\rho^? \arrow[rr, hook, "3"] & & \mathcal{N}_\rho^* & \\
 & & & 1 \arrow[rr, hook, "2"] \arrow[uu, hook] \arrow[ul, hook] \arrow[dl, hook, "2"'] & & \mu \arrow[rr, hook, "3"] \arrow[uu, hook] \arrow[dl, hook, "2"'] & & L_\rho \arrow[uu, hook] \arrow[dl, hook, "2"'] \\
 & & \mu_{\tau'} \arrow[rr, hook, "2"] \arrow[uu, hook] \arrow[uull, hook] & & D_{\tau'} \arrow[rr, hook, "3"] \arrow[uu, hook] & & D_\rho \arrow[uu, hook] &
\end{tikzcd}
\tag{37}
$$

où nous sommes ici intéressés surtout à la 'face supérieure', couvrant des sous-groupes d'indice fini de $\mathcal{N}_\rho^*$, intermédiaires entre celui-ci et $\mathcal{M}_0(-\bar\jmath)$ (d'indice 24 dans $\mathcal{N}_\rho^*$). Je vais examiner la question d'invariance de ces sous-groupes les unes dans les autres, et la structure des groupes quotients.

Je vais refaire un diagramme qui montre mieux les relations entre les groupes en question :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & Z_\rho \arrow[rrr, hook, "2"] \arrow[dddd, dotted, <->, bend right] & & & N^*_\rho \arrow[dddd, dotted, <->, bend right] & \\
 & & & Z^!_{\rho 0} = \mathcal{M}'(-\overline{\jmath}) \times \mu \arrow[rr, hook, "2"] \arrow[dll, hook, "2"'] & & \mathcal{M}'(-\overline{\jmath}) \cdot \mu_{\tau'} \quad ({}^{113}) \arrow[dl, hook, "2"] \\
 & Z^!_\rho = \mathcal{M}'(-\overline{\jmath}) \times \mu \arrow[uu, hook, "3"] \arrow[rrr, hook, "2"] \arrow[ddl, hook, dotted, "3"'] & & & N^?_\rho \arrow[uu, hook, "3"'] \arrow[ddll, hook, dotted, "3"] & \\
 & & & \mathcal{M}^0(-\overline{\jmath}) \arrow[uu, hook, "2"] \arrow[rr, hook, "2"] \arrow[ddll, hook, "2"'] & & \mathcal{M}'''(-\overline{\jmath}) \arrow[uu, hook, "2"'] \arrow[ddl, hook, "2"] \\
Z_\rho \arrow[rr, hook, dotted, "2"] & & N^*_\rho & & & \\
 & \mathcal{M}^0(-\overline{\jmath}) \times \mu \arrow[uuu, hook, "2"] \arrow[rrr, hook, "2"] & & & \mathcal{M}'''(-\overline{\jmath}) \times \mu \arrow[uuu, hook, "2"'] & \\
 & & & 1 \arrow[uuu, hook] \arrow[rr, hook, "2"] \arrow[dll, hook, "2"'] & & \mu_{\tau'} \arrow[uuu, hook] \arrow[dl, hook, "2"] \\
 & \mu \arrow[uu, hook] \arrow[rrr, hook, "2"] \arrow[dl, hook, dotted, "3"'] & & & D_{\tau'} \arrow[uu, hook] \arrow[dll, hook, dotted, "3"] & \\
L_\rho \arrow[uuuu, hook, dotted] \arrow[rr, hook, dotted, "2"] & & D_\rho \arrow[uuuu, hook, dotted] & & &
\end{tikzcd}
\tag{38}
$$

0) Sous-groupes d'indice fini dans Z_ρ – dans le diagramme il y en a quatre :

$$
\begin{tikzcd}
Z^!_\rho \;=\; \mathcal{M}'(-\overline{\jmath}) \times \mu & \mathcal{M}'(-\overline{\jmath}) \;=\; Z^!_{\rho 0} \;=\; \mathcal{N}^{*!}_{\rho 0} \arrow[l, hook', "2"'] \\
\mathcal{M}^0(-\overline{\jmath}) \times \mu \arrow[u, hook, "2"] & \mathcal{M}^0(-\overline{\jmath}) \;=\; Z^{0!}_{\rho 0} \arrow[l, hook', "2"'] \arrow[u, hook, "2"]
\end{tikzcd}
\tag{39}
$$

Sont-ils invariants dans Z_ρ ? C'est clair pour les sous-groupes

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\mathcal{M}'(-\overline{\jmath}) \times \mu \;=\; Z_\rho \cap \mathcal{M}^! \;=\; Z^!_\rho\,, \quad \text{et pour} \\
\mathcal{M}^0(-\overline{\jmath}) \times \mu \;=\; Z_\rho \cap \mathcal{M}^! \cap \operatorname{Ker}(\varepsilon_2 : \mathcal{M} \longrightarrow \mu)
\end{array}
\right.
\tag{40}
$$

[113] Attention, $\mathcal{M}'(-\overline{\jmath}) \cdot \mu_{\tau'}$ n'est *pas* un sous-groupe, car $\mu_{\tau'}$ ne normalise pas $\mathcal{M}'(-\overline{\jmath})$.

– cela montre que ces groupes sont

`[page 623]`

même invariants dans $\mathcal{N}_\rho^*$, puisque Z_ρ, $\mathcal{M}^!$, $\operatorname{Ker}\varepsilon_2$ sont stabilisés par $\mathcal{N}_\rho^*$. D'ailleurs, comme $Z^!_{\rho 0} = \mathcal{M}'(-\overline{\jmath})$ est invariant dans $Z^!_\rho = \mathcal{M}'(-\overline{\jmath}) \times \mu$, pour montrer qu'il l'est dans Z_ρ, il suffit de prouver qu'il est normalisé par ρ (puisque $Z_\rho = L_\rho \cdot Z^!_\rho$ – c'est plus ou moins trivial) ; or examinons de façon générale pour $x \in \mathcal{M}$ si x normalise

$$\mathcal{M}^!_0 \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}(0) \cdot \pi_0 \ ;$$

comme il normalise π_0, il suffit de voir si pour $u \in \mathcal{M}(0)$, on a

$$xux^{-1} \in \mathcal{M}^!_0 \ ,$$

qui équivaut aussi à

$$xux^{-1} \equiv u \qquad (\pi_0) \ ,$$

i.e.

$$[x,u] \in \pi_0 \ .$$

Or on sait que pour $x \in \mathfrak{S}$, $u \in \mathcal{M}^!$, on a

$$(*) \qquad \underbrace{[x,u]}_{= xu(x)^{-1}} \equiv (\mathrm{sg}(x))^{\varepsilon_2(u)} \qquad \mathrm{mod}\ \pi_0$$

`[c.à.d.` $\mathrm{sg}(x)^{\nu_2}$`, où` $\varepsilon_2(u) = (-1)^{\nu_2}$`]`, où

$$\mathrm{sg} : \mathfrak{S} \xrightarrow{\text{can.}} \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{\text{sg}} \mu \ .$$

Cela montre le

Lemme. *Si $x \in \mathfrak{S}^+$, $u \in \mathcal{M}^!_0$, alors conditions équivalentes :*

a) $xux^{-1} \in \mathcal{M}^!_0$.

b) $xux^{-1} \equiv u \ (\pi_0)$, *i.e.* $[x,u] \in \pi_0$.

c) $\mathrm{sg}(x)^{\varepsilon_2(u)} = 1$, *i.e.* $\mathrm{sg}(x) = 1$ ou $\varepsilon_2(u) = 1$.

Corollaire 1. *Soit $x \in \mathfrak{S}^{+\wedge}$. Pour que x normalise $\mathcal{M}^!_0$, il faut et il suffit qu'on ait* $\mathrm{sg}(x) = +1$.

Corollaire 2. *Le sous-groupe $\mathcal{M}''^!_0 = \mathcal{M}''(0) \cdot \pi_0$ est normalisé par $\mathfrak{S}^{+\wedge}$.*

Ceci montre en particulier que ρ normalise $\mathcal{M}^!_0$, donc aussi $\mathcal{M}'(-\overline{\jmath}) = Z^!_{\rho 0} = Z_\rho \cap \mathcal{M}^!_0$, qui est donc invariant dans Z_ρ. Il en est donc de même de son intersection avec $\mathcal{M}^0(-\overline{\jmath}) \times \mu$, soit $\mathcal{M}^0(-\overline{\jmath})$. (Ou encore : ce groupe est égal à $Z_\rho \cap \mathcal{M}''^!_0$, et $\mathcal{M}''^!_0$ est normalisé par $\rho \ldots$). *Ainsi les quatre groupes* (39) *sont distingués dans Z_ρ.*

Pour voir s'ils sont distingués dans $\mathcal{N}_\rho^* = \mu_{\tau'} \cdot Z_\rho$, il suffit de voir s'ils sont normalisés par τ'. C'est clair pour $Z^!_\rho = Z_\rho \cap \mathcal{M}^!$ – d'où le fait que $\mathcal{N}^?_\rho = \mu_{\tau'} \cdot Z^!_\rho$ est un sous-groupe de $\mathcal{N}^*_\rho$. Pour voir lesquels des trois autres sous-groupes envisagés de ce dernier sont normalisés, il faudrait donc expliciter l'action de τ' sur $Z^!_\rho = \mathcal{M}'(-\overline{\jmath}) \times \mu$.

[page 623 bis]

Notons que $\tau \in \mathcal{M}(0) \subseteq \mathcal{M}^!_0$ normalise $\mathcal{M}^!_0$, donc il opère sur $\mathcal{M}^! = \underbrace{\mathcal{M}^!_0}_{\simeq \mathbf{\Gamma}^\sim_{\mathbf{Q}} \times \pi_0} \times \mu$ par l'opération produit de la conjugaison par τ dans $\mathcal{M}^!_0$, et l'identité dans μ. On a d'autre part $\tau' = \tau\sigma$, on a vu que

$$(40) \qquad \sigma(x) \equiv \varepsilon_2(x)x \quad (\pi_0) \qquad \texttt{[pour]}\ x \in \mathcal{M} \qquad \texttt{[}^{114}\texttt{]}\ ,$$

donc

$$(41) \qquad \tau'(x) \equiv \varepsilon_2(x)\tau(x) \quad (\pi_0) \qquad \texttt{[pour]}\ x \in \mathcal{M}\ ,$$

donc il s'ensuit :

$$(42) \quad \begin{cases} \text{Si } x \in \mathcal{M}^!_0\text{ , alors } \tau'(x) \equiv x \ (\pi_0) \iff \tau'(x) \in \mathcal{M}^?_0 \iff \varepsilon_2(x) = 1\ , \\ \text{en particulier, } \mathcal{M}''^!_0 \text{ est normalisé par } \tau\ . \end{cases}$$

Donc appliquant ceci aux éléments de $Z^!_{\rho 0} = \mathcal{M}'(-\bar{\jmath})$ dans $Z^!_\rho = \mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \times \mu$, on trouve :

$$(43) \quad \begin{cases} \text{Soit } x \in Z^!_{\rho 0}\text{ , alors} \\ \tau'(x) \in Z^!_{\rho 0} \iff \varepsilon_2(x) = 1\ . \end{cases}$$

Corollaire. *$Z^!_{\rho 0} = \mathcal{M}'(-\bar{\jmath})$ n'est pas normalisé par τ', donc n'est pas invariant dans $\mathcal{N}^*_\rho$, mais $\mathcal{M}^0(-\bar{\jmath}) = Z_\rho \cap \mathcal{M}''^!_0$ est normalisé par τ', donc aussi son produit par μ.*

Donc le seul des quatre sous-groupes (39) de Z_ρ qui ne soit distingué dans $\mathcal{N}^*_\rho$ est $\mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) = Z^!_{\rho 0}$. Les autres donnent naissance, par produit semi-direct avec $\mu_{\tau'}$, à des sous-groupes de $\mathcal{N}^*_\rho$, invariants dans $\mathcal{N}^*_\rho$. Le plus petit de tous ces sous-groupes est $\mathcal{M}^0(-\bar{\jmath})$, qui est d'indice 24 dans $\mathcal{N}^*_\rho$. Le groupe quotient

$$\mathcal{N}^*_\rho / \mathcal{M}^0(-\bar{\jmath})$$

est donc un groupe d'ordre 24, qui reçoit d'ailleurs le groupe $D_\rho = \mu_{\tau'} \cdot L_\rho \subseteq \mathcal{N}^*_\rho$, normalisateur de L_ρ dans $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})$, groupe isomorphe à $\mathbf{D}_6$, et d'ordre 12. Le noyau de

$$(44) \qquad D_\rho \hookrightarrow \mathcal{N}^*_\rho / \mathcal{M}^0(-\bar{\jmath})$$

est évidemment contenu dans $L_\rho = D_\rho \cap Z_\rho$, et il est réduit à 1 puisqu'on a même

$$L_\rho \cap Z^!_{\rho 0} \subseteq L_\rho \cap \mathcal{M}^!_0 = L_\rho \cap \pi_0 = \{1\}\ .$$

Ainsi D_ρ (d'ordre 12) apparaît comme un sous-groupe d'indice 2 de $\mathcal{N}^*_\rho / \mathcal{M}^0(-\bar{\jmath})$, tout comme il est sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}/\pi_0$. Il serait tentant

[page 624]

alors d'établir un isomorphisme

$$\mathcal{N}^*_\rho / \mathcal{M}^0(-\bar{\jmath}) \overset{?}{\simeq} \mathfrak{S}^\wedge/\pi_0$$

[114] [Deux fois (40).]

compatible avec ces plongements de D_ρ. Essayons-le ainsi :

Proposition. *Considérons l'homomorphisme composé*

$$(45)\qquad \mathcal{M} \xrightarrow{\theta_{\mathcal{M}}} \mathrm{GL}(2,\hat{\mathbf{Z}}) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})}_{\xleftarrow{\sim}\ \underbrace{\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})}_{=\,\mathfrak{S}}/\mathfrak{S}[4]} \xrightarrow{\substack{\text{épimorphisme}\\ \text{de degré 4}}} \mathfrak{S}/\pi_0 \ \simeq\ \mathfrak{S}^\wedge/\pi_0^\wedge\ ,$$

qui induit sur $\mathfrak{S}^\wedge \subseteq \mathcal{M}$ *l'homomorphisme canonique* $\mathfrak{S}^\wedge \longrightarrow \mathfrak{S}^\wedge/\pi_0^\wedge$. *Alors l'homomorphisme induit*

$$\mathcal{N}_\rho^* \longrightarrow \mathfrak{S}/\pi_0$$

a comme noyau $\mathcal{M}^0(-\bar{\jmath})$, *et induit par passage au quotient un isomorphisme*

$$(46)\qquad \mathcal{N}_\rho^*/\mathcal{M}^0(-\bar{\jmath}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}/\pi_0\ .$$

Démonstration. Les éléments de $\mathcal{M}^0(-\bar{\jmath})$ sont les éléments de la forme

$$\left\{ v \ =\ \alpha^{-1}u \ \middle|\ \begin{array}{l} u \ \in\ \mathcal{M}(0)\ ,\quad \alpha\ \in\ \pi_0 \\ u(\rho)\ =\ \alpha(\rho) \quad (\text{donc } \varepsilon_3(u)=1) \\ \varepsilon_2(u)\ =\ 1 \end{array} \right\}\ ,$$

ils sont en correspondance 1-1 avec les éléments de $\mathcal{M}^0(0) = \{u \in \mathcal{M}(0) \mid \varepsilon_2(u) = \varepsilon_3(u) = 1\}$. L'image de v dans $\mathrm{GL}(2\hat{\mathbf{Z}})/\operatorname{Im}\pi_0^\wedge$, a fortiori dans $\mathfrak{S}/\pi_0$, est égale à celle de u. Donc l'assertion que $\mathcal{M}^0(-\bar{\jmath})$ est dans le noyau de $\mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{S}/\pi_0$, équivaut à celle que $\mathcal{M}^0(0)$ est dans ce noyau, donc que l'on a un diagramme commutatif

$$(47)\qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}(0) \arrow[r] \arrow[d, "(\varepsilon_2,\varepsilon_3)"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "(45)"] \\ \mu \times \mu \arrow[r, "?"] & \mathfrak{S}/\pi_0 \end{tikzcd} \qquad ([115])\ .$$

Notons que le composé

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathfrak{S}/\pi_0 \arrow[r] & (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^* \ \simeq\ \{\pm 1\} \\ & \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

n'est autre que ε_2. Notons aussi que par la compatibilité

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\text{can.}"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "(45)"] \\ & \mathfrak{S}/\pi_0 \end{tikzcd}$$

[115] NB Le caractère ε_3 n'intervient pas dans l'explicitation de $\mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{S}/\pi_0$, cf. plus bas ...

l'opération de $\mathcal{M}$ sur $\mathfrak{S}/\pi_0$ déduite de l'homomorphisme (45) n'est autre que l'opération déduite des automorphismes sur $\mathfrak{S}$ en passant au quotient par π_0, opération qui, pour $u \in \mathcal{M}^!$ et en particulier sur $\mathcal{M}(0) \subseteq \mathcal{M}^!$, est donnée par $\varepsilon_2(u)$ (cf. p. 594). Ainsi

`[page 625]`

on voit que $\mathcal{M}''^!$ s'envoie dans le centre de $\mathfrak{S}/\pi_0$, qui est contenu dans $\mathfrak{S}^+/\pi_0$, et en fait égal à l'image μ de π/π_0 dans $\mathfrak{S}^+/\pi_0$ (puisque le centre de $\mathfrak{S}^+/\pi \simeq \mathfrak{S}_3$ est trivial). Donc on a une factorisation

$$\mathcal{M}''^! \longrightarrow \mu \underbrace{\hookrightarrow}_{\text{centre}} \mathfrak{S}/\pi_0 ,$$

et il faudrait vérifier que cet homomorphisme $\mathcal{M}''^! \longrightarrow \mu$ n'est autre que ε_3, qui est donc trivial sur $\mathcal{M}^{0\,!}$ et a fortiori sur $\mathcal{M}^0(0)$. En fait, on se convainc que le noyau n'est pas $\mathrm{Ker}(\varepsilon_3|\mathcal{M}''^!)$ (qui contient en effet μ !), mais $\mathcal{M}''^!_0$ – on va y revenir plus bas.

Admettant ce point, on trouve donc

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{N}^*_\rho \longrightarrow \mathfrak{S}/\pi_0) \;=\; \mathcal{N}^*_\rho \cap \mathcal{M}''^!_0 ,$$

et comme $\mathcal{N}^*_\rho \cap \mathcal{M}^!_0 = Z^!_{\rho\,0} = \mathcal{M}'(-\bar{\jmath})$, on trouve que le noyau cherché est égal à $\mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \cap \mathcal{M}'' = \mathcal{M}^0(-\bar{\jmath})$, c.q.f.d.

Donc on a bien un homomorphisme injectif (46), et comme les groupes

`[page 626]`

en présence ont même ordre 24, cet homomorphisme est bien un isomorphisme, c.q.f.d.

1) Application à la structure de $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ et à la définition d'un homomorphisme $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_{\rho,\sigma}/\mu_\rho$.

Rappelons que

$$\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{N}^*_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^*_\sigma \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} G_{\rho,\sigma} , \tag{48}$$

où

$$\begin{cases} G_{\rho,\sigma} \;\simeq\; \mathcal{M} \;\simeq\; \underbrace{\mathcal{M}(0)}_{\simeq\, \mathcal{M}^{\sim}_{0,3}(0)} \cdot \mathfrak{S}^{+\wedge} \\ \Upsilon_{\rho,\sigma} \overset{\text{def}}{=} G_{\rho,\sigma}/\underbrace{\mathfrak{S}^{+\wedge}}_{=\,\mathfrak{S}_{\rho,\sigma}} \;\simeq\; \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}} \;\; (\xleftarrow{\sim} \mathcal{M}(0) \;) , \\ \mathcal{N}^*_\rho \;=\; \mathrm{Norm}_{\mathcal{M}}(L_\rho) \;, \mathcal{N}^*_\sigma \;=\; \mathrm{Norm}_{\mathcal{M}}(L_\sigma) \; . \end{cases} \tag{49}$$

D'autre part, nous avons introduit les sous-groupes remarquables

$$\begin{cases} Z^!_{\sigma\,0} \;=\; \mathcal{M}(1/2) \;\subseteq\; \mathcal{N}^*_\sigma & \text{(p. 615, (9))} \\ \mathcal{N}^?_\rho \;=\; Z^!_\rho \cdot \mu_{\tau'} \;\subseteq\; \mathcal{N}^*_\sigma & \text{(p. 616, (21))} \; . \end{cases} \tag{50}$$

Le premier de ces groupes ne contient pas μ, le deuxième le contient,

$$\begin{cases} Z^!_{\sigma\,0} \cap \mu \;=\; \{1\} \\ \mathcal{N}^?_\rho \;\supseteq\; \mu \; , \end{cases} \tag{51}$$

et

$$(52)\qquad \begin{cases} Z^!_{\sigma\,0} \xrightarrow{\ \sim\ } \Upsilon_{\rho,\sigma} \;=\; \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}\ , \\ 1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \mathcal{N}^?_\rho \longrightarrow \overbrace{\Upsilon_{\rho,\sigma}}^{=\mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}} \longrightarrow 1 \quad \text{exacte}\ . \end{cases}$$

Soit alors

$$(53)\qquad \begin{aligned} \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \ &\overset{\text{def}}{=}\ \mathcal{N}^?_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z^!_{\sigma\,0} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \underbrace{G_{\rho,\sigma}}_{=\mathcal{M}} \\ &\subseteq\ \mathcal{M}_{\rho,\sigma}\ . \end{aligned}$$

On a un plongement central canonique

$$(54)\qquad \begin{array}{ccccccc} \mu & \times & \mu & \times & \mu & \hookrightarrow & \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \\ (\varepsilon & , & \varepsilon' & , & \varepsilon'') & \longmapsto & (\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon'') \end{array}$$

provenant des plongements centraux

$$\mu \hookrightarrow \mathcal{N}^*_\rho \qquad \mu \hookrightarrow \mathcal{N}^*_\sigma \qquad \begin{tikzcd} \mu \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & G_{\rho,\sigma} \\ & \mathfrak{S}^+_{\rho,\sigma} = \mathfrak{S}^+ \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}\ ,$$

et on a

$$\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \cap (\mu\times\mu\times\mu) \ = \ (1\times\mu\times\mu)\ ,$$

donc

$$(55)\qquad \mu\times\mu \hookrightarrow \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}\ .$$

On désigne par μ_ρ le sous-groupe central μ de $\mathcal{N}_\rho$ ou de $\mathcal{N}^?_\rho$, ou $\mu\times 1$ dans $\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}$. Il est clair par (52) que l'on a une suite exacte

$$(55)\qquad 1 \longrightarrow \mu_\rho \hookrightarrow \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \longrightarrow \underbrace{G_{\rho,\sigma}}_{\simeq\,\mathcal{M}} \longrightarrow 1 \qquad [116]\ ,$$

d'où des homomorphismes canoniques

[page 627]

$$(56)\qquad \mathcal{M} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}/\mu_\rho \hookrightarrow \mathcal{M}_{\rho,\sigma}/\mu_\rho \qquad (117)\ .$$

Évidemment le sous-groupe $\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}$ de $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ contient $\mathfrak{S}_{\rho,\sigma} = SG_{\rho,\sigma} \simeq \mathfrak{S}^{+\wedge}$, en fait on a un

[116] [Deux fois (55).]

[117] On verra donc

$$\Gamma^\natural_{\rho,\sigma} \ \overset{\text{def}}{=}\ \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}/\mathfrak{S}^+_{\rho,\sigma} \hookrightarrow \Gamma_{\rho,\sigma} \ = \ \mathcal{M}_{\rho,\sigma}/\mathfrak{S}^+_{\rho,\sigma}\ .$$

diagramme de suites exactes

(57)
$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r] & \mu_\rho \times \mathfrak{S}_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \underbrace{SZ_\rho}_{=L_\rho} \times \underbrace{SZ_\sigma}_{=L_\sigma} \times \mathfrak{S}^+_{\rho,\sigma} \arrow[rr, phantom] & & \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1 \, .
\end{tikzcd}
$$

Dans l'isomorphisme (56), le sous-groupe $\mathfrak{S}^{+\wedge}$ de $\mathcal{M}$ correspond au sous-groupe $\mu_\rho \times \mathfrak{S}^+_{\rho,\sigma}/\mu_\sigma \simeq \mathfrak{S}_{\rho,\sigma}$, il s'envoie isomorphiquement sur le sous-groupe $\mathfrak{S}_{\rho,\sigma}$ de $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}/\mu_\rho$. On trouve ainsi

(58)
$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \overbrace{\mathfrak{S}^{+\wedge}}^{\simeq \mathfrak{S}^+_{\rho,\sigma}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \overbrace{\mathbf{\Gamma}^\sim_{\mathbf{Q}}}^{\simeq \Upsilon_{\rho,\sigma}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathfrak{S}^+_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}/\mu_\rho \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Gamma^\natural_{\rho,\sigma}/\mu_\rho \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathfrak{S}^+_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}/\mu_\rho \arrow[r] & \Gamma_{\rho,\sigma}/\mu_\rho \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

Ainsi, on trouve en passant que l'homomorphisme canonique épimorphique $[*]$

(59)
$$1 \longrightarrow \underbrace{SZ_\rho \times SZ_\sigma}_{= L_\rho \times L_\sigma} \longrightarrow \Gamma_{\rho,\sigma} \xrightarrow{[*]} \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1$$

admet une 'bisection' $\Gamma^\natural_{\rho,\sigma}$ (dont l'intersection avec $SZ_\rho \times SZ_\sigma$ est $\mu_\rho \times 1$),

(60)
$$\begin{cases} \Gamma_{\rho,\sigma} \simeq \Gamma^\natural_{\rho,\sigma} \cdot \underbrace{S\Gamma_{\rho,\sigma}}_{\simeq SZ_\rho \times SZ_\sigma = L_\rho \times L_\sigma} , \qquad \Gamma^\natural_{\rho,\sigma} \cap S\Gamma_{\rho,\sigma} = \mu_\rho \\ \Gamma_{\rho,\sigma}/\mu_\rho \simeq (\underbrace{\Gamma^\natural_{\rho,\sigma}/\mu_\rho}_{\simeq \Upsilon_{\rho,\sigma} \simeq \mathbf{\Gamma}^\sim_{\mathbf{Q}}}) \cdot (L_\rho/\mu_\rho \times L_\sigma) \, . \end{cases}$$

Pour dire ce que deviennent les sous-groupes remarquables

$$\mathcal{M}(0) \, , \quad \underbrace{\mathcal{M}[0]}_{=\mathcal{M}^{\mathfrak{S}}[0] = \mathcal{M}(0)\cdot L_0^{\mathfrak{S}}} \, , \quad \underbrace{\mathcal{M}^![0]}_{= \mathcal{M}^\pi[0] = \mathcal{M}(0)\cdot L_0^\pi} \, , \quad \underbrace{\mathcal{M}^!_0[0]}_{= \mathcal{M}^{\pi_0}[0] = \mathcal{M}(0)\cdot L_0^{\pi 0}} \, ,$$
$$\underbrace{\mathcal{M}(1/2)}_{= Z^!_{0\,\sigma}} , \quad \mathcal{M}'(-\bar{\jmath}) \, , \quad \mathcal{M}'''(-\bar{\jmath}) \, , \quad \mathcal{N}^?_\rho$$

de $\mathcal{M}$ par l'homomorphisme

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}/\mu_\rho \hookrightarrow \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \, ,$$

il faudrait d'abord introduire les groupes adéquats dans les $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ généraux. Nous allons donc revenir sur ces groupes maintenant.

[page 628]

VI) Les groupes $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ généraux : récapitulation, raffinement.

1°) Donnés. Ce sont celles de V 1°) (p. 577). En plus de $\mathfrak{S}$ (profini) et de $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})^\wedge \longrightarrow \mathfrak{S}$, homomorphisme continu surjectif, i.e. des générateurs ρ, σ, τ (ou ρ, σ, τ') de $\mathfrak{S}$, on se donne aussi un sous-groupe ouvert

$$\mathfrak{S}^\natural \subseteq \mathfrak{S}^+ , \qquad \text{invariant dans } \mathfrak{S} . \tag{1}$$

Dans le cas universel $\mathfrak{S} = \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})^\wedge$, la donnée de $\mathfrak{S}^\natural$ peut correspondre au point de vue où on regarde le sous-groupe $\mathcal{M}^\natural$ de $\mathcal{M}$ formé des u qui normalisent $\mathfrak{S}^\natural$ et qui opèrent trivialement dans $\mathfrak{S}^+/\mathfrak{S}^\natural$ – c'est un sous-groupe ouvert, qui définit dans $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim} = \mathcal{M}/\mathfrak{S}^+$ un sous-groupe image $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\natural\,\sim}$ ouvert, dont on peut se proposer d'étudier les représentations dans des groupes profinis convenables. Un cas intéressant sera celui où

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{S}^\natural &=& \pi_0 , & \text{donc } \mathcal{M}^\natural = \mathcal{M}''^{!} , \\ \text{ou } \mathfrak{S}^\natural &=& \pi , & \text{donc } \mathcal{M}^\natural = \mathcal{M}' . \\ \text{Si } \mathfrak{S}^\natural &=& \mathfrak{S} , & \text{donc } \mathcal{M}^\natural = \mathcal{M} \end{array}$$

[plutôt $\mathfrak{S}^\natural = \mathfrak{S}^+$ dans le troisième cas ?], on retrouvera les constructions précédentes. Un cas intéressant aussi est celui où $\mathfrak{S}$ est le groupe des points adéliques entiers d'un schéma en groupes sur $\mathbf{Z}$ (dans ce cas, il est vrai que ρ, σ, τ n'engendrent peut-être $\mathfrak{S}$ que modulo groupe fini, i.e. ils engendrent peut-être seulement un sous-groupe ouvert. Dans ce cas, il faudrait plutôt *paraphraser* les constructions qui suivent dans le cas schématique. J'y reviendrai par la suite. Un choix intéressant d'un $\mathfrak{S}^\natural$ est alors la *composante neutre* de $\mathfrak{S}$.)

J'hésite à introduire des notations $Z^\natural_{\rho,\sigma}$, $\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}$ etc. – pour ne pas surcharger des notations déjà lourdes. Donc je préfère utiliser les notations plus simples $Z_{\rho,\sigma}$ etc. – étant entendu que dans ces constructions, le groupe $\mathfrak{S}^\natural$ intervient – quitte à réintroduire la notation $^\natural$ au cas de besoin.

On pose

$$\mathfrak{S}^\natural_\tau = \overbrace{\{1,\tau\}}^{=\mu_\tau}\cdot\mathfrak{S}^\natural \subseteq \mathfrak{S} . \tag{2}$$

[page 629]

2°) $Z_{\rho,\sigma}$, $\Upsilon_{\rho,\sigma}$.

Soit

$$Z_{\rho,\sigma} \overset{\text{def}}{=} \left\{ (u,\mu,\varepsilon_2,\varepsilon_3) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{a)} & \exists\, \alpha \in \mathfrak{S}^\natural_\tau \text{ avec } \varepsilon_{\mathfrak{S}}(\alpha) = \varepsilon_3,\ u(\rho) = \alpha(\rho) \\ \text{b)} & \exists\, \beta \in \mathfrak{S}^\natural_\tau \text{ avec } \varepsilon_{\mathfrak{S}}(\beta) = \varepsilon_2,\ u(\sigma) = \beta(\sigma) \\ \text{c)} & u(\varepsilon_0) = \varepsilon_0^\mu \\ \text{d)} & u \text{ normalise } \mathfrak{S}^\natural \end{array} \right\} \tag{4}$$

$$\subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+) \times \hat{\mathbf{Z}}^* \times \mu \times \mu , \qquad [^{118}] .$$

[118] [(3) n'existe pas.]

Proposition. *$Z_{\rho,\sigma}$ est un sous-groupe du groupe produit.*

Démonstration. Les conditions a), d) définissent évidemment chacune une sous-groupe. Compte tenu que

$$\tau(\sigma) \;=\; -\varepsilon\;,$$

la condition b) signifie aussi que

$$\text{(5)} \qquad \text{b}') \qquad u(\sigma) \text{ est } \mathfrak{S}^{\natural}\text{-conjugué à } \sigma^{\varepsilon_2} \; (= \varepsilon_2\sigma)\;,$$

et sous cette forme il est clair que la condition b′) définit un sous-groupe. Je ne pense pas que la condition a) définisse à elle seule un sous-groupe. Mais si $\mathcal{G}_{(\mathrm{b})}$ désigne le sous-groupe du produit défini par la condition b) `[etc.]`, on va montrer que $\mathcal{G}_{(\mathrm{a,b})}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}_{(\mathrm{b})}$ – ce qui prouvera la proposition. Soient $\underline{u}$, $\underline{u}' \in \mathcal{G}_{(\mathrm{b})}$ `[plutôt` $\mathcal{G}_{(\mathrm{a,b})}$`]`, correspondant à $(u,\mu,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ et $(u',\mu',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$, et à α, $\alpha' \in \mathfrak{S}^{\natural}_{\tau}$, de sorte que l'on a

$$\text{(6)} \qquad u(\rho) \;=\; \alpha(\rho)\;, \qquad u'(\rho) \;=\; \alpha'(\rho)\;, \qquad \text{avec } \varepsilon_{\mathfrak{S}}(\alpha) = \varepsilon_3,\ \alpha_{\mathfrak{S}}(\alpha') = \varepsilon_3'\;,$$

prouvons que $\underline{u}'\underline{u} \in \mathcal{G}_{(\mathrm{a,b})}$ – i.e. qu'il satisfait aussi à (b). Si $\varepsilon_3 = 1$, i.e. $\alpha \in \mathfrak{S}^{\natural} \subseteq \mathfrak{S}$ `[il est possible qu'il manque quelque chose ici]`, $u'(\alpha)$ est défini et on aura

$$(u'u)(\rho) \;=\; u'(u(\rho)) \;=\; u'(\alpha(\rho)) \;=\; u'(\alpha)(u'(\rho)) \;=\; u'(\alpha)(\alpha'(\rho)) = (u'(\alpha)\alpha')(\rho) \;=\; \alpha''(\rho)\;,$$

avec

$$\text{(7)} \qquad \left.\begin{aligned} \alpha'' \;&=\; u'(\alpha)\alpha' \;\in\; \mathfrak{S}^{\natural}_{\tau} \\ \varepsilon_{\mathfrak{S}}(\alpha'') \;&=\; \varepsilon_{\mathfrak{S}}(\alpha') \;=\; \varepsilon_3' \;=\; \varepsilon_3\varepsilon_3' \end{aligned}\right\} \qquad \text{Cas } \ \varepsilon_3 = 1$$

(puisque $u'(\alpha) \in \mathfrak{S}^{\natural}$, i.e. $\varepsilon_{\mathfrak{S}}(u'(\alpha)) = 1$, et $\varepsilon_3 = 1$). Dans ce cas on gagne. Si $\varepsilon_3 = -1$, on écrit

$$\alpha \;=\; \alpha_0\tau\;, \qquad \alpha_0 \;\in\; \mathfrak{S}^{\natural}\;,$$

et on aura

$$u(\rho) \;=\; (\alpha_0\tau)(\rho) \;=\; \alpha_0(\tau(\rho)) \;=\; \alpha_0(\sigma(\rho^{-1})) \;=\; (\alpha_0\sigma)(\rho^{-1}\;,)$$

où maintenant $\alpha_0\sigma \in \mathfrak{S}^{+}$, donc $u'(\alpha_0\sigma)$ est défini, et on aura

$$(u'u)(\rho) \;=\; u'(u(\rho)) = u'(\alpha_0\sigma)(\underbrace{u'(\rho^{-1})}_{=\alpha'(\rho^{-1})}) \;=\; (u'(\alpha_0\sigma)\alpha')(\rho^{-1})\;,$$

et comme

$$\rho^{-1} \;=\; \sigma\tau(\rho)$$

on trouve

$$\text{(8)} \qquad (u'u)(\rho) = \alpha''(\rho)\;,$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha'' \;=\; \varepsilon\,\overbrace{u'(\alpha_0)}^{\in\,\mathfrak{S}^{\natural}}\,\overbrace{u'(\sigma)}^{\mathfrak{S}^{+}}\,\overbrace{\alpha'}^{\in\,\mathfrak{S}^{\natural}_{\tau}}\;\sigma\tau\;, \quad \text{où} \\ &\varepsilon \;\in\; \mu \;=\; \{\pm 1\} \;=\; \text{Centre}\,\mathfrak{S}^{+} \quad \text{est choisi de façon que } \alpha'' \text{ (si possible) soit dans } \mathfrak{S}^{\natural}_{\tau}. \end{aligned}\right.$$

Notons que tous les facteurs de ce produit sont dans $\mathfrak{S}_\tau^\natural$ ou $\mathfrak{S}^+$, en tous cas $\alpha'' \in \mathfrak{S}$.

`[page 630]`

Réduisant modulo $\mathfrak{S}^\natural$, la relation $\alpha'' \in \mathfrak{S}_\tau^\natural$ s'écrit

$$\dot\alpha'' \in \{1, \dot\tau\} \ , \quad \text{i.e.} \ \ \dot\varepsilon u'(\sigma)^{\cdot} \dot\alpha' \dot\sigma \dot\tau \in \{1, \dot\tau\} \ , \quad \text{soit} \ \ \dot\varepsilon u'(\sigma)^{\cdot} \dot\alpha' \dot\sigma \ \in \ \{1, \dot\tau\} \ ,$$

on distingue encore deux cas :

1°) $\varepsilon_3' = 1$, i.e. $\dot\alpha' = 1$; la relation s'écrit

$$(*) \qquad \dot\varepsilon u'(\sigma)^{\cdot} \dot\sigma \ = \ 1 \ .$$

2°) $\varepsilon_3' = -1$, i.e. $\dot\alpha' = \dot\tau$; comme $\tau\sigma = -\sigma\tau$, la relation s'écrit

$$(**) \qquad -\dot\varepsilon u'(\sigma)^{\cdot} \dot\sigma \ = \ 1 \ .$$

Donc dans tous les cas, la relation s'écrit

$$(9) \qquad \begin{cases} u'(\sigma)^{\cdot} \ = \ (\varepsilon\varepsilon_3')^{\cdot} \dot\sigma^{-1} \ , \quad \text{soit encore} \\ u'(\sigma)^{\cdot} \ = \ (-\varepsilon\varepsilon_3')^{\cdot} \dot\sigma \ . \end{cases}$$

Or supposant maintenant qu'on a b) pour u', ce qui implique

$$u'(\sigma)^{\cdot} \ = \ \varepsilon_2' \dot\sigma \ ,$$

on voit donc qu'il suffit de choisir ε de façon que $-\varepsilon\varepsilon_3' = \varepsilon_2'$, i.e.

$$\varepsilon \ = \ -\varepsilon_2'\varepsilon_3' \ ,$$

donc on aura

$$\alpha'' \ = \ -\varepsilon_2'\varepsilon_3' u'(\underbrace{\alpha_0\sigma}_{=\alpha\tau\sigma = \alpha\tau'})\alpha' \underbrace{\sigma\tau}_{-\tau'} \ ,$$

i.e.

$$(10) \qquad \left.\alpha'' \ = \ \varepsilon_2'\varepsilon_3' u'(\alpha\tau')(\alpha'\tau') \qquad \right\} \qquad \text{Cas} \ \ \varepsilon_3 = -1 \ ,$$

formule qui a un sens car $\alpha\tau' \in \mathfrak{S}^+$, donc $u'(\alpha\tau')$ est défini, et l'argument précédent prouve que l'élément en question satisfait

$$(11) \qquad \alpha'' \in \ \mathfrak{S}_\tau^\natural \ , \qquad \varepsilon_{\mathfrak{S}}(\alpha'') \ = \ \underbrace{\varepsilon_{\mathfrak{S}}(\alpha)}_{=\,-1} \varepsilon_{\mathfrak{S}}(\alpha') \ ,$$

en distinguant les cas $(*)$ et $(**)$ de (9). Même conclusion dans les premier cas où $\varepsilon_{\mathfrak{S}}(\alpha) = 1$ (7). Cela achève la démonstration.

Remarque. Si $\mathfrak{S}$ est 'assez gros', l'homomorphisme de projection est injectif,

$$(12) \qquad Z_{\rho,\sigma} \hookrightarrow \ \mathrm{Aut}(\mathfrak{S})^+ \qquad \text{(cf. p. 578)} \ .$$

Examples dans le cas universel.

a) $\mathfrak{S}^\natural = \mathfrak{S}^+ = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})^\wedge$. La condition (4 d) est vide, les conditions a), b) équivalent respectivement au fait que $u(\rho)$ conjugué à ρ^{ε_3}, $u(\sigma)$ conjugué à σ^{ε_2}, i.e. on retombe sur la définition (6), p. 578, qui donne

$$(13) \qquad Z_{\rho,\sigma} \;=\; \mathcal{M}(0)\cdot L_0^{\mathfrak{S}} \;=\; \mathcal{M}^{\mathfrak{S}}[0] \;=\; \mathcal{M}[0] \qquad ({}^{119})\ .$$

b) $\mathfrak{S}^\natural = \pi = \pi_0 \times \mu$. On trouve maintenant

$$(14) \qquad Z_{\rho,\sigma} \;=\; \mathcal{M}(0)\cdot L_0^{\pi} \;=\; \mathcal{M}^{\pi}[0] \;=\; \mathcal{M}^![0]$$

(noté $Z^!_{\rho,\sigma}$ dans V 8°) ([120], [121]).

c) $\mathfrak{S}^\natural = \pi_0$. Les conditions a) et b) n'ont pas changé par rapport au cas précédent, puisque $\pi = \pi_0 \times \mu$ et μ est central ; par contre, la

[page 631]

condition d) devient nettement plus stricte, on trouve p.ex. que $Z_{\rho,\sigma} \cap \mathfrak{S}^+ = L_0^{\pi_0}$ (d'indice 2 dans le groupe correspondant L_0^{π} du cas précédent), et comme l'opération de $\mathcal{M}(0) \subseteq \mathcal{M}^!$ sur $\mathfrak{S}^+/\pi_0$ 'se fait par le caractère ε_2 ', on voit que l'on a maintenant

$$(15) \qquad Z_{\rho,\sigma} \;=\; \mathcal{M}''(0)\cdot L_0^{\pi_0} \;=\; \mathcal{M}''[0]_0\ ,$$

où, pour mémoire,

$$\begin{cases} \mathcal{M}''(0) &=& \mathrm{Ker}(\mathcal{M}(0) \xrightarrow{\varepsilon_2} \mu) \\ \mathcal{M}''[0]_0 &=& \mathrm{Ker}(\mathcal{M}[0] \xrightarrow{\varepsilon_2} \mu) \\ \mathcal{M}[0]_0 &=& \mathcal{M}(0)\cdot L_0^{\pi_0}\ . \end{cases}$$

([122]).

Ces deux derniers examples suggèrent l'opportunité, dans le cas général où on disposerait d'un sous-groupe $\mathfrak{S}_0^\natural$ de $\mathfrak{S}^\natural$, invariant dans $\mathfrak{S}$, tel qu'on ait

$$(16) \qquad \mathfrak{S}^\natural \;=\; \mathfrak{S}_0^\natural \times \mu$$

[119]**NB** A priori on a plutôt $Z_{\rho,\sigma} \subseteq \mathcal{M}^{\sim}_{0,3}$, mais on a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}[0] & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}^{\sim}_{0,3}[0] \\ \| & & \| \\ \mathcal{M}(0)\cdot L_0^{\mathfrak{S}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_{0,3}(0)\cdot L_0^{\mathfrak{S}_{0,3}}\ . \end{array}$$

[120]Dans ce cas, il est immédiat que $Z_{\rho,\sigma}$ opère trivialement sur $\mathfrak{S}^+/\mathfrak{S}^\natural$, car il en est ainsi de $\mathcal{M}^![0] = \mathcal{M}^{\pi}[0]$.

[121]Expliciter à nouveau pourquoi (i.e. pourquoi $(\varepsilon_0,1,1,1) \notin Z_{\rho,\sigma}$).

[122]Il en est ainsi si dans la définition de $Z_{\rho,\sigma}$ on exige dans d) que u induit l'opération triviale sur $\mathfrak{S}^+/\mathfrak{S}^\natural$, condition que j'ai finalement abandonnée comme inutile. Donc avec la nouvelle version, les cas $\mathfrak{S}^\natural = \pi$ et $\mathfrak{S}^\natural = \pi_0$ donnent le même $Z_{\rho,\sigma}$. Mais je voudrais obtenir $\mathcal{M}^{\pi_0}[0] = \mathcal{M}[0]^!_0 = \mathcal{M}(0)\cdot\pi_0$, le groupe de b) est un peu trop grand, celui de c) (ancienne manière) un peu trop petit !

(où μ est le sous-groupe central universel $\mu = \{1, \rho^3\} = \{1, \sigma^2\}$), de définir $Z_{\rho,\sigma}$ en termes de $\mathfrak{S}^\natural$, et de *choisir* les α, β de la définition (4) dans

$$(17) \qquad \mathfrak{S}^\natural_{0\,\tau} \overset{\text{def}}{=} \mu_\tau \cdot \mathfrak{S}^\natural_0 \qquad ({}^{123}) \ .$$

Remarque. On est tenté de remplacer la définition (4) (pour a) et b)) par la définition d'apparence plus simple de la p. 578, qui rend évident qu'on a un sous-groupe. Mais elle ne donne pas, même si $\mathfrak{S}^\natural \subseteq \pi$ (cas *universel*) une action triviale de Z sur $\mathfrak{S}^+/\pi$, comme on le veut sûrement `[quelques mots manquent]` qu'en se restreignant à des $(u, \mu, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_3 = 1$, car $\dot\rho^{-1}$ n'est *pas* égal à $\dot\rho$! Il est vrai (dans le cas universel p.ex.) que $u(\rho)$ est conjugué *dans* $\mathfrak{S}^+$ à ρ^{ε_3}, mais en général il ne le sera pas par un élément (disons) de π.

On posera

$$(18) \qquad L^\natural_0 = \{l \in L^{\mathfrak{S}}_0 \mid (\mathrm{int}(l), 1, 1, 1) \in Z_{\rho,\sigma}\} \qquad ({}^{124})$$

(où $L^{\mathfrak{S}}_0 \subseteq \mathfrak{S}^+$ est l'ensemble des ε_0^n, $n \in \hat{\mathbf{Z}}$), et on a un homomorphisme canonique

$$(19) \qquad L^\natural_0 \longrightarrow Z_{\rho,\sigma} \ ,$$

injectif si et seulement si on a

$$(20) \qquad L^\natural_0 \cap \mathrm{Centr}(\mathfrak{S}^+) = \{1\} \ ,$$

l'image invariante (^{125}). On pose

$$(21) \qquad \Upsilon_{\rho,\sigma} = Z_{\rho,\sigma}/L^\natural_0 \ ,$$

d'où

$$(22) \qquad 1 \longrightarrow L^\natural_0 \longrightarrow Z_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\delta_Z} \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 \ ,$$

$$(23) \qquad \begin{tikzcd} & & \mu \\ Z_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[ur, "\varepsilon_3\Upsilon"] \arrow[r, "\chi\Upsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon_2\Upsilon"'] & \hat{\mathbf{Z}}^* \\ & & \mu \ , \end{tikzcd}$$

déduit de

$$(u, \mu, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \left\{ \begin{array}{l} \longmapsto \ \varepsilon_3 \\ \longmapsto \ \mu \\ \longmapsto \ \varepsilon_2 \end{array} \right. .$$

---

[123] Cette remarque sur un $\mathfrak{S}^\natural_0$ devient maintenant inutile.

[124] **NB** On a $L^\natural_0 \supseteq L_0 \cap \mathfrak{S}^\natural$, et l'inclusion peut être stricte, cf. exemple c) ci-dessus ..., où $L^\natural_0 = L^\pi_0$, $L_0 \cap \mathfrak{S}^\natural = L^{\pi_0}_0$.

[125] Ce qu'on suppose.

`[page 632]`

On pose

$$(24)\quad \begin{cases} \Upsilon'_{\rho,\sigma} \ = \ \operatorname{Ker} \varepsilon_{3\Upsilon}\ , \ \ \Upsilon''_{\rho,\sigma} \ = \ \operatorname{Ker} \varepsilon_{2\Upsilon}\ , \ \ \Upsilon'''_{\rho,\sigma} \ = \ \operatorname{Ker} \varepsilon_{3\Upsilon}\varepsilon_{2\Upsilon}\ , \\ \Upsilon^0_{\rho,\sigma} \ = \ \Upsilon' \cap \Upsilon'' = \Upsilon'' \cap \Upsilon''' \ = \ \Upsilon''' \cap \Upsilon'\ , \\ Z'_{\rho,\sigma}\ ,\ \ Z''_{\rho,\sigma}\ ,\ \ Z'''_{\rho,\sigma}\ ,\ \ Z^0_{\rho,\sigma} \qquad \text{sont les images inverses de } \Upsilon'_{\rho,\sigma} \text{ dans } Z_{\rho,\sigma}\ . \end{cases}$$

Ce sont donc des sous-groupes d'indice 1, 2 ou 4 de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ resp. $Z_{\rho,\sigma}$ – l'indice 4 ne pouvant se présenter que pour $\Upsilon^0_{\rho,\sigma}$, $Z^0_{\rho,\sigma}$.

Remarques. `[Ces remarques vont jusqu'à la page 650.]`

1°) On a donc

$$(25)\qquad Z^0_{\rho,\sigma} \ \simeq \ \left\{ (u,\mu) \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{S}^+) \times \hat{\mathbf{Z}}^* \ \middle| \ \begin{array}{ll} \text{a)} & u(\rho) \text{ est } \mathfrak{S}^\natural\text{-conjugué à } \rho \\ \text{b)} & u(\sigma) \text{ est } \mathfrak{S}^\natural\text{-conjugué à } \sigma \\ \text{c)} & u(\varepsilon_0) \ = \ \varepsilon_0^\mu \end{array} \right\}$$

(isomorphisme de groupes). La condition d) de (4) – stabilité de $\mathfrak{S}^\natural$ sous u – est conséquence ici de a) b) c), car on aura

$$\begin{aligned} u(\rho) \ &\equiv \ \rho \quad (\mathfrak{S}^\natural) \\ u(\sigma) \ &\equiv \ \sigma \quad (\mathfrak{S}^\natural)\ , \end{aligned}$$

ce qui implique

$$(25\text{ bis})\qquad u(x) \ \equiv \ x \quad (\mathfrak{S}^\natural) \qquad \forall\, x \ \in \ \mathfrak{S}^+\ ,$$

i.e. la stabilité de $\mathfrak{S}^\natural$ *et* une action triviale de u sur $\mathfrak{S}/\mathfrak{S}^\natural$ `[plutôt sur` $\mathfrak{S}^+/\mathfrak{S}^\natural$`]` ([126]).

2°) On a encore l'élément remarquable

$$(26)\qquad \tau_Z \ \in \ Z_{\rho,\sigma}\ , \qquad \tau_Z \ = \ (\tau,-1,-1,-1) \qquad ([127])\ .$$

3°) $S_0G_{\rho,\sigma}$, $G_{\rho,\sigma}$, $S_0G^\natural_{\rho,\sigma}$, $G^\natural_{\rho,\sigma}$**.**

Procédant comme page 579, on trouve

$$Z_{\rho,\sigma} \ \longrightarrow \ \operatorname{Aut}(\mathfrak{S}^+)\ ,$$

[126] Plus généralement,

$$Z'''_{\rho,\sigma} \ \simeq \ \left\{ (u,\mu,\varepsilon) \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{S}^+) \times \hat{\mathbf{Z}}^* \times \mu \ \middle| \ \begin{array}{ll} \text{a)} & u(\rho) \text{ est } \mathfrak{S}^\natural\text{-conjugué à } \varepsilon[\tau](\rho) \\ \text{b)} & u(\sigma) \text{ est } \mathfrak{S}^\natural\text{-conjugué à } \varepsilon[\tau](\sigma) \\ \text{c)} & u(\varepsilon_0) \ = \ \varepsilon_0^\mu\ . \end{array} \right\}\ .$$

[127] C'est une raison de plus pour ne pas exiger dans (4 d) que u opère trivialement sur $\mathfrak{S}^+/\mathfrak{S}^\natural$, ce qui nous ferait perdre τ !

d'où des produits semi-directs

$$S_0G_{\rho,\sigma} \overset{\text{def}}{=} Z_{\rho,\sigma}\cdot\mathfrak{S}^+ \supseteq S_0G^\natural_{\rho,\sigma} \overset{\text{def}}{=} Z_{\rho,\sigma}\cdot\mathfrak{S}^\natural \tag{27}$$

et un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} L_0^\natural & \xhookrightarrow{i_{L_0^\natural,G}} & S_0G^\natural_{\rho,\sigma} \subseteq S_0G_{\rho,\sigma} \\ l & \longmapsto & i_{L_0,Z}(l)\cdot l^{-1} \end{array} \tag{28}$$

d'image invariante, ce qui permet de poser

$$G_{\rho,\sigma} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{S_0G_{\rho,\sigma}}_{Z_{\rho,\sigma}\cdot\mathfrak{S}^+}/\operatorname{Im}L_0^\natural \supseteq G^\natural_{\rho,\sigma} = S_0G^\natural_{\rho,\sigma}/\operatorname{Im}L_0^\natural\ , \tag{29}$$

d'où `[des]` suites exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & L_0^\natural \arrow[r] \arrow[d, equal] & S_0G^\natural_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, hook] & G^\natural_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \\ 1 \arrow[r] & L_0^\natural \arrow[r] & S_0G_{\rho,\sigma} \arrow[r] & G_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{30}$$

et `[un]` diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z_{\rho,\sigma} \arrow[r, hook, "i_Z"] & G^\natural_{\rho,\sigma} \arrow[r, hook] & G_{\rho,\sigma} \\ L_0^\natural \arrow[u, hook, "i_{L_0,Z}"] \arrow[r, hook, "i_{L_0,\mathfrak{S}}"] & \mathfrak{S}^\natural \arrow[u, hook, "i_{\mathfrak{S}^\natural}"] \arrow[r, hook] & \mathfrak{S}^+ \arrow[u, hook, "i_{\mathfrak{S}}"] \end{tikzcd}\ , \tag{31}$$

s'insérant dans `[un]` diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & L_0^\natural \arrow[r] \arrow[d, hook] & Z_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\delta_Z"] \arrow[d, hook] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathfrak{S}^\natural \arrow[r] \arrow[d, hook] & G^\natural_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\delta_G"] \arrow[d, hook] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathfrak{S}^+ \arrow[r] & G_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}\ . \tag{32}$$

On considère les composés

$$\begin{tikzcd} & & \mu \\ G_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\delta_G"] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[ur, "\varepsilon_{2\,\Upsilon}"] \arrow[r, "\chi_\Upsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon_{3\,\Upsilon}"'] & \hat{\mathbf{Z}}^* \\ & & \mu \end{tikzcd}\ , \tag{33}$$

notés

$$\chi_G \;=\; \chi_\Upsilon \circ \delta_G \;, \qquad \varepsilon_{2\,G} \;=\; \varepsilon_{2\,\Upsilon} \circ \delta_G \;, \qquad \varepsilon_{3\,G} \;=\; \delta_G \varepsilon_{3\,\Upsilon}$$

`[plutôt` $\varepsilon_{3\,G} \;=\; \varepsilon_{3\,\Upsilon} \circ \delta_G$`]`. On a maintenant

$$(34) \qquad \begin{cases} G'_{\rho,\sigma},\, G''_{\rho,\sigma},\, G'''_{\rho,\sigma},\, G^0_{\rho,\sigma} \text{ comme dans (24)} \\ G^+_{\rho,\sigma} = \operatorname{Ker}\chi_G,\, G'^{\,+}_{\rho,\sigma},\, G''^{\,+}_{\rho,\sigma},\, G'''^{\,+}_{\rho,\sigma},\, G^{0\,+}_{\rho,\sigma}, \\ (\Upsilon^+_{\rho,\sigma} = \operatorname{Ker}\chi_\Upsilon \text{ oublié } \ldots) \end{cases} \qquad ({}^{128}) \;.$$

Si

$$(35) \qquad \tau_G \;\in\; G^\natural_{\rho,\sigma} \;\subseteq\; G_{\rho,\sigma} \;, \qquad \tau_\Upsilon \;\in\; \Upsilon_{\rho,\sigma}$$

`[page 633]`

désignent les images de τ_Z (26) dans $G_{\rho,\sigma}$, $\Upsilon_{\rho,\sigma}$, on peut faire l'identification

$$(36) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S} \;\simeq\; \text{image inverse de } \{1,\tau_\Upsilon\} \subseteq \Upsilon_{\rho,\sigma} \text{ dans } G_{\rho,\sigma}, \text{ par } G_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \;, \\ \mathfrak{S}^\natural \;= \text{image inverse de } \{1,\tau_\Upsilon\} \subseteq \Upsilon_{\rho,\sigma} \text{ dans } G^\natural_{\rho,\sigma} \;, \end{cases}$$

et

$$(37) \qquad \varepsilon_{\mathfrak{S}} \;=\; \chi_{\mathfrak{S}}|\mathfrak{S} \;=\; \varepsilon_{2\,G}|\mathfrak{S} \;=\; \varepsilon_{3\,G}|\mathfrak{S} \;:\; \begin{cases} \text{trivial sur } \mathfrak{S}^+ \\ -1 \text{ sur } \tau \;. \end{cases}$$

Considérons l'aplication canonique

$$(38) \qquad \begin{array}{ccccccccc} G^\natural_{\rho,\sigma} \hookrightarrow & G_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \operatorname{Aut}(\mathfrak{S}^+) & \times & \hat{\mathbf{Z}}^* & \times & \mu & \times \;\mu \\ & \underline{u} & \longmapsto & \Big(\; \operatorname{int}(\underline{u})|\mathfrak{S}^+ & , & \chi_G(u) & , & \varepsilon_{2\,G}(u) & , \;\; \varepsilon_{3\,G}(u) \;\Big) \;. \end{array}$$

Proposition. *C'est un homomorphisme de groupes. L'image de $G^\natural_{\rho,\sigma}$ est formée des systèmes*

$$(u, \mu, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \;\in\; \operatorname{Aut}(\mathfrak{S}^+) \times \hat{\mathbf{Z}}^* \times \mu \times \mu$$

satisfaisant les conditions

$$(39) \qquad \begin{cases} \text{a)} \;\; u(\rho) \textit{ est } \mathfrak{S}^\natural\textit{-conjugué à } \varepsilon_3[\tau]\rho \;, \\ \text{b)} \;\; u(\sigma) \textit{ est } \mathfrak{S}^\natural\textit{-conjugué à } \varepsilon_2[\tau]\sigma \;, \\ \text{c)} \;\; u(\varepsilon_0) \textit{ est } \mathfrak{S}^\natural\textit{-conjugué à } \varepsilon_0^\mu \;, \\ \text{d)} \;\; u \textit{ stabilise } \mathfrak{S}^\natural \textit{ (automatique via a), b) si } \varepsilon_2 = \varepsilon_3) \;. \end{cases}$$

Son noyau est

$$(40) \qquad \left\{ f^{-1}\underline{u} \;\in\; G^\natural_{\rho,\sigma} \;\middle|\; \begin{array}{l} \underline{u} \;=\; (u,1,1,1) \;\in\; Z^{0\,+}_{\rho,\sigma} \;, \\ f \;\in\; \mathfrak{S}^\natural \;, \quad u \;=\; \operatorname{int}(f) \end{array} \right\} \;.$$

[128]Itou avec $G'^{\natural}_{\rho,\sigma}$ ...

Corollaire. *Soient*

$$(41)\qquad Z_0 \;=\; \mathrm{Centr}_{\mathfrak{S}^+}(L_0)\ , \qquad Z_0^\natural \;=\; Z_0 \cap \mathfrak{S}^\natural = \{f \in \mathfrak{S}^\natural \mid (\mathrm{int}(f), 1, 1, 1) \in Z_{\rho,\sigma}\}\ ,$$

de sorte que $L_0^\natural$ *s'identifie à un sous-groupe central de* $Z_0^\natural$*. Considérons l'application*

$$(42)\qquad \begin{array}{ccccl} Z_0^\natural & \longrightarrow & S_0G^\natural_{\rho,\sigma} & = & Z_{\rho,\sigma}\cdot G^\natural \\ f & \longmapsto & \underbrace{f^{-1}}_{\in\,\mathfrak{S}^\natural}\cdot\underbrace{\underline{u}(f)}_{\in\, Z_{\rho,\sigma}} & = & \underline{u}(f)\cdot f^{-1}\ , \quad \textit{où}\quad \underline{u}(f) = (\mathrm{int}(f), 1, 1, 1) \in Z_{\rho,\sigma} \subseteq G^\natural_{\rho,\sigma}\ . \end{array}$$

Cette application est un homomorphisme de groupes, elle induit sur $L_0^\natural \subseteq Z_0^\natural$ *l'homomorphisme canonique* (28)*, et* $L_0^\natural \subseteq Z_0^\natural$ *est l'image inverse de* $i_{L_0,SG}(L_0^\natural) = \mathrm{Ker}(S_0G^\natural_{\rho,\sigma} \longrightarrow G^\natural_{\rho,\sigma})$*. On trouve ainsi un homomorphisme injectif*

$$(43)\qquad Z_0^\natural / L_0^\natural \hookrightarrow G^\natural_{\rho,\sigma}\ ,$$

dont l'image est le noyau de (38)*, i.e. on a une suite exacte canonique*

$$(44)\qquad 1 \longrightarrow L_0^\natural \longrightarrow Z_0^\natural \longrightarrow G^\natural_{\rho,\sigma} \longrightarrow \underbrace{\tilde{G}^\natural_{\rho,\sigma}}_{\subseteq\, \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+)\times\hat{\mathbf{Z}}^*\times\mu\times\mu} \longrightarrow 1\ ,$$

où $\tilde{G}^\natural_{\rho,\sigma}$ *est formé des* $(u, \mu, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *satisfaisant les conditions* (39).

Remarque. Cette proposition fait apprécier dans quelle mesure la construction faite ici de $G^\natural_{\rho,\sigma}$ est plus fine que celle où on le définissait simplement comme un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{S}^+$ (avec même au besoin des μ, ε, ε' par dessus le marché ...).

`[page 634]`

On va considérer aussi l'homomorphisme (en fait effectivement moins fin que (38), même dans des cas pas du tout dégénérés tels que $\mathfrak{S}^+ = \mathrm{SL}(2, \hat{\mathbf{Z}})$)

$$(45)\qquad \begin{array}{ccccccc} G^\natural_{\rho,\sigma} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+) & \times & \mu & \times & \mu \\ \underline{u} & \longmapsto & (\mathrm{int}(\underline{u})|\mathfrak{S}^+ & , & \varepsilon_3(\underline{u}) & , & \varepsilon_2(\underline{u})) \end{array}$$

induit par (38), son image est formée des systèmes $(u, \varepsilon_3, \varepsilon_2)$ tels que

$$(46)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{a)} & u(\rho) \text{ est } \mathfrak{S}^\natural\text{-conjugué à } \varepsilon_3[\tau](\rho)\ , \\ \text{b)} & u(\sigma) \text{ est } \mathfrak{S}^\natural\text{-conjugué à } \varepsilon_2[\tau](\sigma)\ , \\ \text{c)} & u(L_0^{\mathfrak{S}}) \text{ est } \mathfrak{S}^\natural\text{-conjugué à } L_0\ , \\ \text{d)} & u \text{ stabilise } \mathfrak{S}^\natural \text{ (automatique si } \varepsilon_3 = \varepsilon_2\text{, via a), b))}\ . \end{array}\right.$$

Son noyau est

$$(47)\qquad \left\{ f^{-1}\underline{u} \;\in\; G^\natural_{\rho,\sigma} \;\middle|\; \begin{array}{l} \underline{u} \;=\; (u, \mu, 1, 1) \;\in\; Z^{0+}_{\rho,\sigma}\ , \\ f \;\in\; \mathfrak{S}^\natural \quad \text{tel que } u \;=\; \mathrm{int}(f) \end{array} \right\}\ .$$

Pour apprécier la structure du noyau, soient

$$(48)\quad \begin{cases} S\mathcal{N}_0 &= \mathrm{Norm}_{\mathfrak{S}^+}(L_0)\ , \\ S\mathcal{N}_0^\natural &= S\mathcal{N}_0 \cap \mathfrak{S}^\natural \ = \ \{f \in \mathfrak{S}^\natural \mid \exists\, \mu \in \hat{\mathbf{Z}}^* \ \text{ tel que } \ (\mathrm{int}(f), \mu, 1, 1) \in Z_{\rho,\sigma}\}\ , \end{cases}$$

et soit

$$(49)\quad \begin{matrix} \tilde{S\mathcal{N}_0} &=& \{(u,\mu) \mid u(\varepsilon_0) = \varepsilon_0^\mu\} \\ &\subseteq& S\mathcal{N}_0 \times \hat{\mathbf{Z}}^* \end{matrix} \ , \qquad \tilde{S\mathcal{N}_0^\natural} \ = \ \tilde{S\mathcal{N}_0} \cap (\mathcal{N}_0^\natural \times \hat{\mathbf{Z}}^*)$$

– donc on a

$$(50)\quad \begin{matrix} \tilde{S\mathcal{N}_0^\natural} & \xrightarrow{\sim} & S\mathcal{N}_0^\natural \\ (u,\mu) & \longmapsto & u \end{matrix} \qquad \text{si} \qquad \begin{matrix} \hat{\mathbf{Z}} & \longrightarrow & L_0^{\mathfrak{S}} \\ n & \longmapsto & \varepsilon_0^n \end{matrix} \qquad \text{est injectif} \qquad ({}^{129})\ .$$

On a un homomorphisme canonique injectif

$$(51)\quad \begin{matrix} \tilde{S\mathcal{N}_0^\natural} & \longrightarrow & S_0\tilde{G}^\natural_{\rho,\sigma} \ = \ Z_{\rho,\sigma}\cdot \mathfrak{S}^+ \\ (f,\mu) & \longmapsto & f^{-1}\cdot(\mathrm{int}(f),1,1,1) \ = \ u\cdot f^{-1}\ , \end{matrix}$$

qui induit sur $L_0^\natural$ l'homomorphisme canonique (28) (et qui prolonge (42)) – il est encore vrai que l'image inverse de $i_{L_0,SG}(L_0^\natural)$ est $L_0^\natural \subseteq \widetilde{S\mathcal{N}}_0^\natural$, et on trouve ainsi une suite exacte canonique

$$(52)\quad 1 \longrightarrow L_0^\natural \longrightarrow \widetilde{S\mathcal{N}}_0^\natural \longrightarrow G^\natural_{\rho,\sigma} \longrightarrow \underbrace{\tilde{\tilde{G}}_{\rho,\sigma}}_{\subseteq\ \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+)\times\mu\times\mu} \longrightarrow 1\ ,$$

où $\tilde{\tilde{G}}_{\rho,\sigma}$ est formé des $(u,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ satisfaisant (16) – i.e. on a

$$(52\text{ bis})\quad \widetilde{S\mathcal{N}}_0^\natural / L_0^\natural \ \simeq \ \mathrm{Ker}(G^\natural_{\rho,\sigma} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+)\times\mu\times\mu)\ .$$

`[page 635]`

4°) $\mathcal{N}_\rho$, $\mathcal{N}_\sigma$, Z_ρ, Z_σ, $\mathcal{N}_\rho^\natural$, $\mathcal{N}_\sigma^\natural$, $Z_\rho^\natural$, $Z_\sigma^\natural$.

On pose

$$(53)\quad \begin{cases} \mathcal{N}_\rho &= \ \{a \in G_{\rho,\sigma} \mid a(\rho) \ = \ \rho^{\varepsilon_3}\ , \quad \text{où} \quad \varepsilon_3 \ = \ \varepsilon_3(a)\} \\ \mathcal{N}_\sigma &= \ \{b \in G_{\rho,\sigma} \mid b(\rho) \ = \ \rho^{\varepsilon_2}\ , \quad \text{où} \quad \varepsilon_2 \ = \ \varepsilon_2(b)\}\ . \end{cases}$$

NB Il n'y a pas lieu finalement de traîner des * en donnant une définition de $\mathcal{N}_\rho$, $\mathcal{N}_\sigma$ qui donneraient des groupes plus gros. (Donc p. 580 je me suis autocanulé à ce sujet . . .)

On pose

$$(54)\quad \begin{cases} Z_\rho \ = \ \mathrm{Centr}_{G_{\rho,\sigma}}(\rho) \ = \ \mathrm{Centr}_{G_{\rho,\sigma}}(L_\rho) \ = \ \mathrm{Ker}(\mathcal{N}_\rho \xrightarrow{\varepsilon_3} \mu) \\ Z_\sigma \ = \ \mathrm{Centr}_{G_{\rho,\sigma}}(\sigma) \ = \ \mathrm{Centr}_{G_{\rho,\sigma}}(L_\sigma) \ = \ \mathrm{Ker}(\mathcal{N}_\sigma \xrightarrow{\varepsilon_2} \mu) \end{cases}$$

[129] Itou pour $\tilde{S\mathcal{N}_0}$.

$$(55)\qquad \begin{cases} SZ_\rho \;=\; Z_\rho \cap \mathfrak{S}^+ \;=\; \mathrm{Ker}(Z_\rho \xrightarrow{\delta_Z} \Upsilon_{\rho,\sigma}) \;=\; \mathrm{Centr}_{\mathfrak{S}^+}(\rho) \;=\; \mathrm{Centr}_{\mathfrak{S}^+}(L_\rho) \\ SZ_\sigma \;=\; Z_\sigma \cap \mathfrak{S}^+ \;=\; \mathrm{Ker}(Z_\sigma \xrightarrow{\delta_Z} \Upsilon_{\rho,\sigma}) \;=\; \mathrm{Centr}_{\mathfrak{S}^+}(\sigma) \;=\; \mathrm{Centr}_{\mathfrak{S}^+}(L_\sigma) \end{cases} \quad ({}^{130})\ ,$$

d'où

$$(56)\qquad \begin{matrix} 1 \longrightarrow Z_\rho \longrightarrow \mathcal{N}_\rho \xrightarrow{\varepsilon_{3\,\rho}} \mu \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow Z_\sigma \longrightarrow \mathcal{N}_\sigma \xrightarrow{\varepsilon_{2\,\sigma}} \mu \longrightarrow 1 \end{matrix} \quad ({}^{131})\ .$$

Le fait qu'on peut mettre des 1 au bout provient du fait que $\tau' \in \mathcal{N}_\rho \cap \mathcal{N}_\sigma$ satisfait

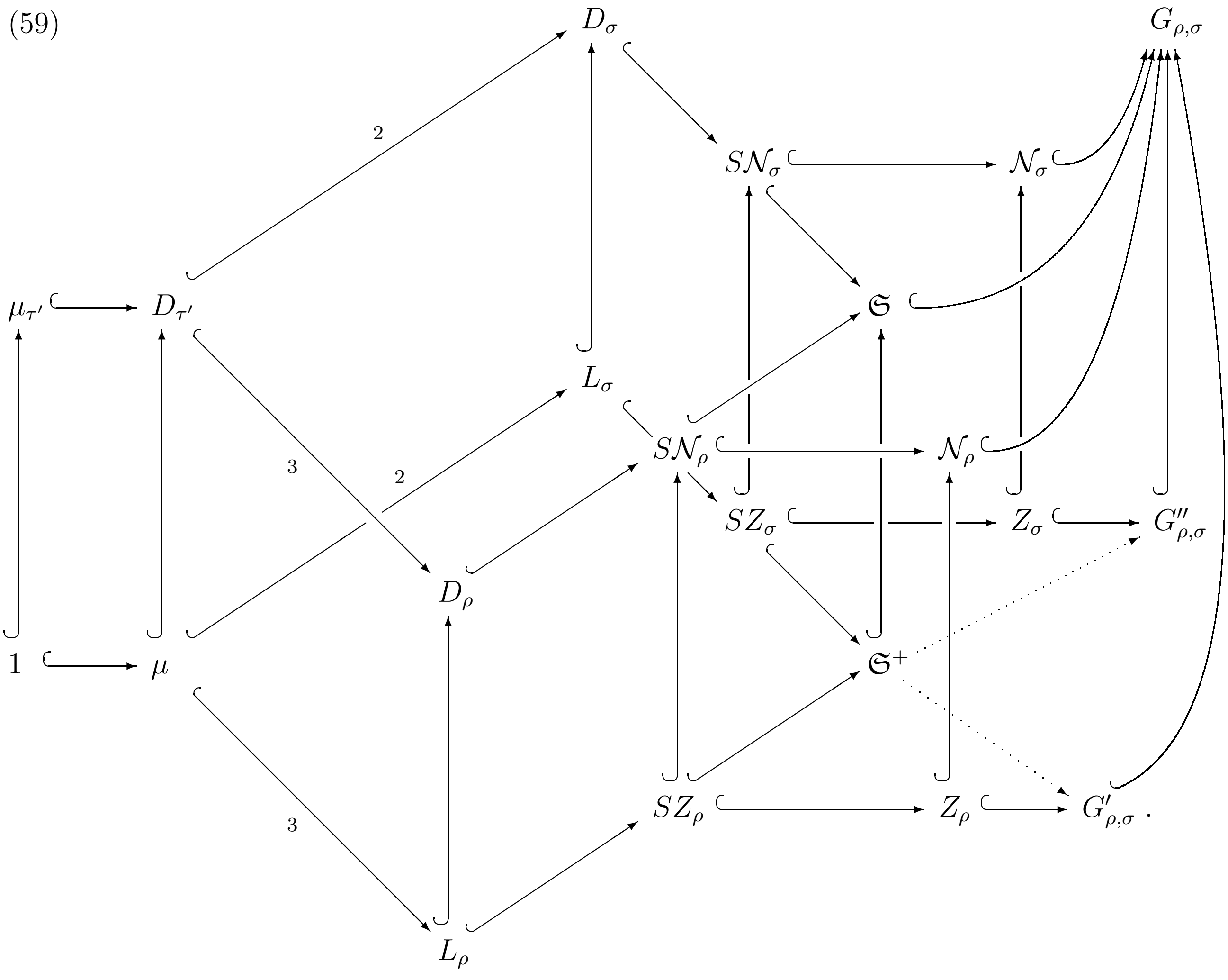
$$(57)\qquad \varepsilon_2(\tau') \;=\; \varepsilon_3(\tau') \;=\; \chi(\tau') \;=\; -1\ .$$

On a un merveilleux diagramme (p. 580)

$$(58)\qquad \begin{tikzcd} & D_\rho \arrow[r] & \underbrace{N_\rho \cap \mathfrak{S}}_{=\mu_{\tau'}\cdot SZ_\rho} \arrow[rr] \arrow[dr] & & N_\rho \arrow[dr] & \\ D_{\tau'} = \mu_{\tau'} \times \mu \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \mathfrak{S} \arrow[rr] & & G_{\rho,\sigma} \\ & D_\sigma \arrow[r] & \underbrace{N_\rho \cap \mathfrak{S}}_{=\mu_{\tau'}\cdot SZ_\rho} \arrow[rr] \arrow[ur] & & N_\rho \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ou mieux

(59)



---

[130] On définit de façon idoine $S\mathcal{N}_\rho$, $S\mathcal{N}_\sigma$, mais on a $S\mathcal{N}_\rho = SZ_\rho$, $S\mathcal{N}_\sigma = SZ_\sigma$.

[131] Suites exactes *scindées* par $\mu_{\tau'}$ – la deuxième aussi scindée par μ_τ.

On définit :

(60) $$\mathcal{N}_\rho^\natural\,,\quad \mathcal{N}_\sigma^\natural\,,\quad Z_\rho^\natural\,,\quad Z_\sigma^\natural\,,\quad SZ_\rho^\natural\,,\quad SZ_\sigma^\natural\,,$$

intersection de $\mathcal{N}_\rho$, $\mathcal{N}_\sigma$ etc. avec $\mathfrak{S}_{\rho,\sigma}^\natural$. On a des suites exactes

(61) $$\begin{cases} 1 \longrightarrow SZ_\rho^\natural \longrightarrow \mathcal{N}_\rho^\natural \xrightarrow{\delta_\rho^\natural} \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow SZ_\sigma^\natural \longrightarrow \mathcal{N}_\sigma^\natural \xrightarrow{\delta_\sigma^\natural} \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1\,, \end{cases}$$

et des homomorphismes de suites exactes

[page 636]

(62) $$\left\{\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & SZ_\rho^\natural \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{N}_\rho^\natural \arrow[r, "\delta_\rho^\natural"] \arrow[d, hook] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & SZ_\rho \arrow[r] & \mathcal{N}_\rho \arrow[r, "\delta_\rho"] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & SZ_\sigma^\natural \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{N}_\sigma^\natural \arrow[r, "\delta_\sigma^\natural"] \arrow[d, hook] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & SZ_\sigma \arrow[r] & \mathcal{N}_\sigma \arrow[r, "\delta_\sigma"] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1\,, \end{tikzcd}\right.$$

(63) $$\left\{\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & Z_\rho^\natural \arrow[r] \arrow[d, "\text{épi}"] & \mathcal{N}_\rho^\natural \arrow[r, "\varepsilon_{3\,\rho}^\natural"] \arrow[d, "\text{épi}"] & \mu \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \Upsilon'_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\varepsilon_{3\,\Upsilon}"] & \mu \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & Z_\sigma^\natural \arrow[r] \arrow[d, "\text{épi}"] & \mathcal{N}_\sigma^\natural \arrow[r, "\varepsilon_{2\,\sigma}^\natural"] \arrow[d, "\text{épi}"] & \mu \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \Upsilon''_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r, "\varepsilon_{3\,\Upsilon}"] & \mu \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}\right.$$

(et diagrammes analogues sans $\natural$).

On a donc un diagramme

(64)
$$
\begin{tikzcd}
& L_0^\natural \simeq SZ_{\rho,\sigma} \arrow[rr] \arrow[dddr, hook] & & Z_{\rho,\sigma} \arrow[dddr, hook] & & & & & \\
& & SZ_\rho^\natural \arrow[rr] \arrow[dd, hook] & & \mathcal{N}_\rho^\natural \arrow[dd, hook] & & & \mu & \\
& & & SZ_\sigma^\natural \arrow[rr] \arrow[dl, hook] & & \mathcal{N}_\sigma^\natural \arrow[dl, hook] & & & \hat{\mathbf{Z}}^* \quad \mu \\
1 \arrow[rr] & & \mathfrak{S}^\natural \arrow[rr] \arrow[d, hook] & & G_{\rho,\sigma}^\natural \arrow[rr] & & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[uur, "\varepsilon_3\Upsilon"] \arrow[urr, "\chi\Upsilon"] \arrow[urr, "\varepsilon_2\Upsilon"'] & 1 & \\
1 \arrow[rr] & & \mathfrak{S}^+ \arrow[rr] & & \mathfrak{S} \arrow[rr] \arrow[u, hook] & & \mu_\tau \arrow[r] \arrow[u, hook] & 1 &
\end{tikzcd}
$$

(cf. p. 581, (45)), et diagramme analogue sans $\natural$.

Je voudrais maintenant définir l'analogue des sous-groupes $\mathcal{M}(1/2)$, $\mathcal{M}'(-\bar{\jmath})$, $\mathcal{M}'''(-\bar{\jmath})$, $\mathcal{N}_\rho^?$ de p. 615 ff., ce qui implique qu'on ait un groupe $\subseteq G_{\rho,\sigma}^\natural$ jouant le rôle de $\mathcal{M}_0^!$ – l'idéal serait que ce soit $G_{\rho,\sigma}^\natural$ lui-même. Mais dans le cas universel $\mathfrak{S} = \mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})^\wedge$, $\mathfrak{S}^\natural = \pi_0$, d'où $Z_{\rho,\sigma} = \mathcal{M}^![0] = \mathcal{M}(0)\cdot L_0^\pi$, $L_0^\natural = L_0^\pi$, on trouve $G_{\rho,\sigma} \simeq \mathcal{M}$,

$$
\begin{aligned}
G_{\rho,\sigma}^\natural &= \text{sous-groupe de } G_{\rho,\sigma} = \mathcal{M} \text{ engendré par } \mathfrak{S}^\natural = \pi_0 \text{ et par } Z_{\rho,\sigma} = \mathcal{M}(0)\cdot L_0^\pi \\
&= \mathcal{M}(0)\cdot\pi \;=\; \mathcal{M}^! \,, \qquad \textit{et non } \mathcal{M}(0)\cdot\pi_0 = \mathcal{M}_0^! \,.
\end{aligned}
$$

L'ennui provient finalement du fait que c'est $Z_{\rho,\sigma}$ qui est trop gros ; on aimerait définir dans $Z_{\rho,\sigma}$ un sous-groupe qui joue le rôle de $\mathcal{M}(0)\cdot\pi_0$. Il n'y a pas de difficulté si on peut définir dans $Z_{\rho,\sigma}$ un sous-groupe qui corresponde à $\mathcal{M}(0)$,

(65)
$$Z_{\rho,\sigma}(0) \;\subseteq\; Z_{\rho,\sigma} \,,$$

qui donne un scindage

(66)
$$Z_{\rho,\sigma} \;\simeq\; Z_{\rho,\sigma}(0)\cdot L_0^\natural \qquad \text{(semi-direct)} \,,$$

et on aura alors

(67)
$$G_{\rho,\sigma} \;\simeq\; \underbrace{Z_{\rho,\sigma}(0)\cdot\mathfrak{S}^+}_{\text{(semi-direct)}} \,,$$

`[page 637]`

et on poserait

(68)
$$
\left\{
\begin{aligned}
G_{\rho,\sigma}^\natural &\overset{\text{def}}{=} Z_{\rho,\sigma}(0)\cdot\mathfrak{S}^\natural \\
&\subseteq G_{\rho,\sigma}^\natural \subseteq G_{\rho,\sigma} = Z_{\rho,\sigma}(0)\cdot\mathfrak{S}^+ \\
Z_{\rho,\sigma}^\natural &= G_{\rho,\sigma}^\natural \cap Z_{\rho,\sigma} = Z_{\rho,\sigma}(0)\cdot(L_0\cap\mathfrak{S}^\natural) \,.
\end{aligned}
\right.
$$

Rappelons une façon standard d'obtenir un scindage canonique de $Z_{\rho,\sigma}$ sur $\Upsilon_{\rho,\sigma}$, quand on dispose d'un (ρ,σ)-homomorphisme

$$\mathfrak{S} \longrightarrow \mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}})' \ = \ \mathrm{SL}(2,\hat{\mathbf{Z}})/\{\pm 1\}\ , \tag{69}$$

commutant à l'action de τ, ce qui induit un homomorphisme

$$Z_{\rho,\sigma} \longrightarrow B'_0 \ = \ \{\left(\begin{smallmatrix}\mu & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \mid \mu \in \hat{\mathbf{Z}}^*, \lambda \in \hat{\mathbf{Z}}\} \tag{70}$$

grâce à l'étude du §48, induisant

$$\begin{cases} L_0^\natural & \longrightarrow \quad L'_0 \ = \ \{\left(\begin{smallmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \hat{\mathbf{Z}}\} \\ \varepsilon_0^n & \longmapsto \quad \left(\begin{smallmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\ . \end{cases} \tag{71}$$

Plus précisément, on a un diagramme de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & L_0^\natural \arrow[r] \arrow[d, hook, "\varepsilon_0^n \,\mapsto\, n"'] & Z_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, "\chi_\Upsilon"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \hat{\mathbf{Z}} \arrow[r, "\lambda \,\mapsto\, \left(\begin{smallmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)"'] & B'_0 \arrow[r, "\det", "\left(\begin{smallmatrix}\mu & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \,\mapsto\, \mu"'] & \hat{\mathbf{Z}}^* \arrow[r] & 1\ . \end{tikzcd} \tag{72}$$

Si l'homomorphisme (71) est un *isomorphisme,* alors tout scindage de la deuxième suite exacte en définit par image inverse un de la première. Mais dans les cas typiques qui nous [intéressent], $L_0^\natural$ (qui n'est pas assez petit pour donner 'le bon' $G^\natural_{\rho,\sigma}$!) n'est pas assez gros par contre pour donner un isomorphisme dans (71) ! Mais on peut aussi faire une *hypothèse* supplémentaire – savoir que l'image inverse par (70) du 'tore' section

$$T'_0 \ = \ \{\left(\begin{smallmatrix}\mu & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \mid \mu \in \hat{\mathbf{Z}}^*\} \ \subseteq \ B'_0\ , \tag{73}$$

qui est un sous-groupe

$$\begin{aligned} Z_{\rho,\sigma}(0) \ &= \ \{u \in Z_{\rho,\sigma} \mid \text{son image } \left(\begin{smallmatrix}\mu & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \text{ est dans } T'_0, \text{ i.e. } \lambda = 0\} \\ &\subseteq \ Z_{\rho,\sigma} \end{aligned} \tag{74}$$

satisfaisant

$$Z_{\rho,\sigma}(0) \cap L_0^\mu \ = \ \{1\}\ , \tag{75}$$

soit en fait un sous-groupe section ; i.e. que $Z_{\rho,\sigma}(0) \hookrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}$ soit épimorphique, i.e. isomorphique ; i.e. que l'on a bien

$$Z_{\rho,\sigma} \ = \ Z_{\rho,\sigma}(0) \cdot L_0^\natural\ . \tag{76}$$

J'ai de bonnes raisons de penser que (dès que (69) existe) cette condition est satisfaite dans tous les cas vraiment utiles. Ce choix d'un

[page 638]

$Z_{\rho,\sigma}(0)$ a la bonne propriété d'ailleurs d'être 'fonctoriel' dans un sens évident (cf. plus bas les questions de fonctorialité), ce qui sera essentiel pour avoir un bon formalisme. Ceci nous permet donc de définir un sous-groupe $(G^\natural_{\rho,\sigma})_0 \subseteq G^\natural_{\rho,\sigma}$ par (68). Si sa définition n'était ainsi un peu trop alambiquée, c'est [ce] groupe 'plus fin' qui serait meilleur, et mériterait en fait la notation plus simple $G^\natural_{\rho,\sigma}$.

Autre façon de procéder ? On cherche en somme des restrictions adéquates dans la définition de $Z_{\rho,\sigma}$, qui impliquent que $L^\natural_0 = L_0 \cap \mathfrak{S}$, i.e. que pour $l \in L_0$, on a

$$(\mathrm{int}(l), 1, 1, 1) \in Z_{\rho,\sigma} \qquad \Longleftrightarrow \qquad l \in \mathfrak{S}^\natural .$$

Mais dans le cas universel, avec $\mathfrak{S}^\natural = \pi_0$, prenant $l = l_0$, son image dans $\mathfrak{S}/\mathfrak{S}^\natural = \mathfrak{S}/\pi_0$ est l'élément central non trivial de $\mathfrak{S}/\pi_0$, l'automorphisme intérieur qu'il définit dans $\mathfrak{S}^+/\pi_0$ (et même dans $\mathfrak{S}/\pi_0$) est trivial – donc ce n'est pas par des propriétés de cette action qu'on arrivera à l'exorciser !

Mais peut-être est-il prématuré d'essayer déjà de 'découper' nos groupes $G^\natural_{\rho,\sigma}$, $\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}$ 'aussi fin que possible' – peut-être y a-t-il encore des erreurs d'orientation assez grossières, qui se rectifieront par l'examen de cas particuliers. Donc je vais renoncer pour l'instant à continuer à investir de l'énergie aux découpages, et m'en tiendrai donc là dans ce sens, quitte à y revenir par la suite et à raffiner les constructions présentes, qu'il faudra cependant comparer à l'occasion à celles de §48, XI.

[page 639]

5°) $S_0\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}$, $\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}$, $S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$, $\Gamma_{\rho,\sigma}$ ...

On posera comme dans p. 583

$$\left\{ \begin{array}{lcl} S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} & = & Z_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\sigma \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} G_{\rho,\sigma} \\ S_0\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} & = & Z_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\sigma \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} G^\natural_{\rho,\sigma} \end{array} \right. \tag{77}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_{\rho,\sigma} & = & \mathcal{N}^\natural_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\sigma \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} G_{\rho,\sigma} \\ \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} & = & \mathcal{N}^\natural_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\sigma \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} G^\natural_{\rho,\sigma} \end{array} \right. \tag{78}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} S_0\Gamma_{\rho,\sigma} & = & Z_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\sigma \\ \Gamma_{\rho,\sigma} & = & \qquad\qquad \mathcal{N}^\natural_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\sigma , \end{array} \right. \tag{79}$$

d'où [un] diagramme de suites exactes

(79)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr] & & \mathfrak{S}^+ \arrow[rr, hook] \arrow[dr, equal] & & S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \arrow[rr] \arrow[dr] & & S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \arrow[rr] \arrow[dr] & & 1 & \\
& 1 \arrow[rr] & & \mathfrak{S}^+ \arrow[rr, hook] & & \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \arrow[rr] & & \Gamma_{\rho,\sigma} \arrow[rr] & & 1 \\
1 \arrow[rr] & & \mathfrak{S}^\natural \arrow[rr, hook] \arrow[dr, equal] \arrow[uu, hook] & & S_0\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[uu, hook] & & S_0\Gamma^\natural_{\rho,\sigma} \arrow[dr] \arrow[uu, hook] & & & \\
& 1 \arrow[rr] & & \mathfrak{S}^\natural \arrow[rr, hook] \arrow[uu, hook] & & \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \arrow[rr] \arrow[uu, hook] & & \Gamma^\natural_{\rho,\sigma} \arrow[rr] \arrow[uu, hook] & & 1
\end{tikzcd}$$

[132] ,

et des (homomorphismes de) suites exactes

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \overbrace{SZ_{\rho,\sigma}}^{=L_0^\natural} \times S\mathcal{N}_\rho^\natural \times S\mathcal{N}_\sigma^\natural \times \mathfrak{S}^\natural \arrow[r] \arrow[d, hook] & S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \underbrace{SZ_{\rho,\sigma}}_{=L_0^\natural} \times S\mathcal{N}_\rho^\natural \times S\mathcal{N}_\sigma^\natural \times \mathfrak{S}^+ \arrow[r] & S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
\tag{81}
$$
[133]

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & S\mathcal{N}_\rho^\natural \times S\mathcal{N}_\sigma^\natural \times \mathfrak{S}^\natural \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & S\mathcal{N}_\rho^\natural \times S\mathcal{N}_\sigma^\natural \times \mathfrak{S} \arrow[r] & \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Upsilon_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
\tag{82}
$$

$$1 \longrightarrow L_0^\natural \times S\mathcal{N}_\rho^\natural \times S\mathcal{N}_\sigma^\natural \longrightarrow S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1 \tag{83}$$

$$1 \longrightarrow S\mathcal{N}_\rho^\natural \times S\mathcal{N}_\sigma^\natural \longrightarrow \Gamma_{\rho,\sigma} \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1\ , \tag{84}$$

[et]

$$\begin{cases} S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} & \simeq & \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z_{\rho,\sigma} \\ S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural & \simeq & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z_{\rho,\sigma} \end{cases} \tag{85}$$

$$S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \simeq \Gamma_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} Z_{\rho,\sigma} \tag{86}$$

$$\begin{cases} S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} & \simeq & \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \times_{\Gamma_{\rho,\sigma}} S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \\ S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural & \simeq & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural \times_{\Gamma_{\rho,\sigma}} S_0\Gamma_{\rho,\sigma}\ . \end{cases} \tag{87}$$

Remarque. Cette dégelée de groupes donne un peu le mal de mer. Je ne suis pas sûr que les variantes S_0 ($S_0\mathcal{M}$, $S_0\mathcal{M}^\natural$, $S_0\Gamma$) soient très utiles. Reste la comparaison [?] entre des invariants avec ou sans $\natural$, surtout donc $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ et $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural$ – dont la 'différence' est 'la même' qu'entre $\mathfrak{S}^+$ et $\mathfrak{S}^\natural$, et entre $G_{\rho,\sigma}$ et $G_{\rho,\sigma}^\natural$; de façon précise, $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ est invariant dans $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural$, et $G_{\rho,\sigma}^\natural$ dans $G_{\rho,\sigma}$; on a des isomorphismes

$$\mathfrak{S}^+/\mathfrak{S}^\natural \xrightarrow{\sim} G_{\rho,\sigma}/G_{\rho,\sigma}^\natural \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\rho,\sigma}/\mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural\ . \tag{88}$$

Les groupes $G_{\rho,\sigma}$, $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ jouent par rapport à $G_{\rho,\sigma}^\natural$, $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural$ le rôle de fourre-tout, notamment pour nous permettre de considérer les automorphismes ρ, σ de $G_{\rho,\sigma}^\natural$, $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural$ comme induits par des automorphismes intérieurs de groupes

[132] [Deux fois (79).]
[133] [(80) n'existe pas.]

[page 640]

environnants $G_{\rho,\sigma}$, $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$.

On a un élément

$$\tau'_{\mathcal{M}} = (\underbrace{\tau'_\rho}_{\in \mathcal{N}^\natural_\rho}, \underbrace{\tau'_\sigma}_{\in \mathcal{N}^\natural_\sigma}, \underbrace{\tau'_G}_{\in G^\natural_{\rho,\sigma}}) \tag{89}$$

au dessus de $\tau'_\gamma \in \Upsilon_{\rho,\sigma}$, d'où des plongements canoniques

(90)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S}^\natural_\tau \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \arrow[d, hook] & \mathfrak{S}^\natural = \text{image inverse dans } \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \text{ de } \{1, \tau_\Upsilon\} \subseteq \Upsilon_{\rho,\sigma} \\ \mathfrak{S} \arrow[r, hook] & \mathcal{M}_{\rho,\sigma} & \mathfrak{S} = \text{image inverse dans } \mathcal{M}_{\rho,\sigma} \text{ de } \{1, \tau_\Upsilon\} \subseteq \Upsilon_{\rho,\sigma} \end{tikzcd}$$

[plutôt $\mathfrak{S}^\natural$ image inverse dans $\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}$]. On peut reprendre le diagramme bordélique de p. 584, avec des $\natural$ à la clef ...

Je vais voir si je peux me dispenser justement de redévelopper les liens avec $\Sigma_{\rho,\sigma}$, $S\mathcal{G}_{\rho,\sigma}$ etc. – quitte à y revenir au besoin par la suite.

6°) Fonctorialités.

([134]). Cf. p. 588. En plus de l'homomorphisme surjectif

$$\mathfrak{S} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{S}' \qquad ([135]) , \tag{91}$$

on suppose que φ applique $\mathfrak{S}^\natural$ dans $\mathfrak{S}'^\natural$. On désignera ici par $Z_{\rho,\sigma}$, $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ etc. les invariants associés à $\mathfrak{S}$, [par] $Z_{\rho',\sigma'}$ etc. ceux de $\mathfrak{S}'$. On a des conditions équivalentes comme dans loc. cit. – où on va laisser tomber la considération de $\Sigma^{\mathfrak{S}}_{\rho,\sigma}$ ...– qui signifiaient que pour tout

$$\underline{u} = (u, \mu, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in Z_{\rho,\sigma}$$

il existe un automorphisme u' de $\mathfrak{S}'$ rendant commutatif

(92)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S}^+ \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u"'] & \mathfrak{S}'^+ \arrow[d, "u'"] \\ \mathfrak{S}^+ \arrow[r, "\varphi"] & \mathfrak{S}'^+ \end{tikzcd} ,$$

lequel u' sera unique. Il revient au même de dire que les $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}^+)$ qui proviennent de $Z_{\rho,\sigma}$, i.e. qui *normalisent* L_0, et qui transforment ρ, σ en des éléments $\mathfrak{S}^\natural_\tau$-conjugués à ρ, σ, stabilisent le noyau de φ (91). On trouve alors

[page 641]

$$Z_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\varphi_Z} Z_{\rho',\sigma'} , \tag{93}$$

[134]**NB** Jusqu'ici (dans 1°) à 5°)) on n'avait pas utilisé l'hypothèse que ρ, σ engendrent $\mathfrak{S}^+$.

[135]Il vaut mieux [le] noter $\mathfrak{S}_0 \longrightarrow \mathfrak{S}$, cf. p. 643 ff. ...

compatible avec les actions de $Z_{\rho,\sigma}$, $Z_{\rho',\sigma'}$ sur $\mathfrak{S}^+$ resp. $\mathfrak{S}'^+$, et avec les homomorphismes

$$Z_{\rho,\sigma} \supseteq L_0^\natural \longrightarrow \mathfrak{S}^+ , \qquad Z_{\rho',\sigma'} \supseteq L_0'^\natural \longrightarrow \mathfrak{S}'^+ ,$$

d'où par la construction standard un homomorphisme

$$G_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\varphi_G} G_{\rho',\sigma'} \tag{94}$$

induisant

$$G^\natural_{\rho,\sigma} \xrightarrow{\varphi_{G^\natural}} G^\natural_{\rho',\sigma'} , \tag{95}$$

d'où un homomorphisme du diagramme (64) relatif à (σ,ρ), dans le diagramme analogue relatif à (ρ',σ'), avec ou sans $\natural$. Il n'en faut pas plus pour que toutes les constructions et diagrammes du numéro précédent, relatives à ρ, σ, s'envoient dans celles relatives à ρ', σ'.

Remarque. Supposons que $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}'^\natural$ satisfassent à la condition suivante :

(96)
Pour tout couple d'éléments α', $\beta' \in \mathfrak{S}'^\natural_\tau$, tels que l'on ait

`[*]` $\qquad [\alpha',\rho] = [\beta',\sigma]\varepsilon_1^{\mu-1} \qquad$ pour $\mu \in \hat{\mathbf{Z}}$ convenable

il existe un $u' \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}'^+)$ tel que

$$u'(\rho) = \alpha'(\rho) , \qquad u'(\sigma) = \beta'(\sigma) , \tag{97}$$

i.e.

$$\alpha'^{-1}u' \in \mathrm{Centr}_{\mathrm{Aut}}(\rho) , \qquad \beta'^{-1}u' \in \mathrm{Centr}_{\mathrm{Aut}}(\sigma) , \tag{98}$$

la relation des lacets `[*]` s'exprimant en termes de u par la condition

$$u'(L_0^{\mathfrak{S}'}) = L_0^{\mathfrak{S}'} , \qquad \text{i.e. } u' \text{ normalise } \mathfrak{S}' . \tag{99}$$

Alors tout (ρ,σ)-homomorphisme $(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^\natural) \longrightarrow (\mathfrak{S}',\mathfrak{S}'^\natural)$ est nécessairement admissible.

Nous allons appliquer ceci au cas où $\mathfrak{S}$ est universel – mais pour pouvoir en dire tout ce qu'on a envie, je vais d'abord parler des sous-groupes

$$\mathcal{M}(0) , \ \mathcal{M}(\rho) , \ \mathcal{M}(\sigma) \ \subseteq \ \mathcal{M}_{\rho,\sigma} .$$

`[page 642]`

7°) Les groupes $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0]$, $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\rho)$, $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\sigma)$.

Dans le groupe

$$\begin{aligned} S_0\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} &= Z_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\sigma \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} G^\natural_{\rho,\sigma} \\ &= \{x=(u,a,b,U) \in Z_{\rho,\sigma} \times \mathcal{N}^\natural_\rho \times \mathcal{N}^\natural_\sigma \times G^\natural_{\rho,\sigma} \mid \delta_Z(u)=\delta_\rho(a)=\delta_\sigma(b)=\delta_G(U)\} , \end{aligned} \tag{100}$$

on introduit trois sous-groupes

$$(101)\qquad \begin{cases} S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(0) & \subseteq & S_0\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} & \text{par [la] condition} & U & = & i_Z(u) \\ S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\rho) & \subseteq & S_0\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} & \text{par [la] condition} & U & = & i_\rho(a) \\ S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\sigma) & \subseteq & S_0\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} & \text{par [la] condition} & U & = & i_\sigma(b) \end{cases}$$

en utilisant maintenant les trois homomorphismes canoniques

$$(102)\qquad \begin{cases} i_Z & : & Z_{\rho,\sigma} & \hookrightarrow & G_{\rho,\sigma} \\ i_\rho & : & \mathcal{N}_\rho & \hookrightarrow & G_{\rho,\sigma} \\ i_\sigma & : & \mathcal{N}_\sigma & \hookrightarrow & G_{\rho,\sigma}\ . \end{cases}$$

Ces trois groupes sont manifestement tous trois isomorphes à $Z_{\rho,\sigma} \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\sigma = S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$; de façon précise, dans la suite exacte (52),

$$1 \longrightarrow \mathfrak{S}^+ \longrightarrow S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \longrightarrow S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \longrightarrow 1\ ,$$

l'homomorphisme canonique $S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \longrightarrow S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$ induit des isomorphismes entre les groupes (68) et $S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$; ces trois groupes sont donc des sous-groupes sections.

On définit $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0]$, $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\rho)$ (ou $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(1/2)$) et $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\sigma)$ (ou $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(-\bar{\jmath})$) comme les images de $S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(0)$, $S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\rho)$ et $S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\sigma)$ par l'homomorphisme canonique $S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \longrightarrow \mathcal{M}_{\rho,\sigma}$, ce qui revient à poser

$$(103)\qquad \begin{cases} \mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0] & = & \{(a,b,U) \in \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \mid U \in Z_{\rho,\sigma}\} \\ \mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\rho) & = & \{(a,b,U) \in \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \mid U = a\} \\ \mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\sigma) & = & \{(a,b,U) \in \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} \mid U = b\}\ . \end{cases}$$

Donc les sous-groupes $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\rho)$, $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\sigma)$ de $\mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma}$ sont des groupes sections au dessus de $\Gamma^\natural_{\rho,\sigma} \simeq \mathcal{N}^\natural_\rho \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}^\natural_\sigma$, donc

$$(104)\qquad \begin{cases} \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} & \simeq & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\rho)\cdot\mathfrak{S}^\natural \\ \mathcal{M}^\natural_{\rho,\sigma} & \simeq & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\sigma)\cdot\mathfrak{S}^\natural \end{cases} \qquad \text{(semi-directs)}\ ,$$

et de même

$$(105)\qquad \begin{cases} \mathcal{M}_{\rho,\sigma} & \simeq & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\rho)\cdot\mathfrak{S}^+ \\ \mathcal{M}_{\rho,\sigma} & \simeq & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}(\sigma)\cdot\mathfrak{S}^+ \end{cases} \qquad \text{(semi-directs)}\ .$$

D'autre part, on aura

$$(106)\qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & L_0^\natural \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0] \arrow[r] & \Gamma_{\rho,\sigma} \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 1 \\ & & S_0\mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0] \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\wr"] & & \\ 1 \arrow[r] & L_0^\natural \arrow[r] & S_0\Gamma_{\rho,\sigma} \arrow[r] & \Gamma_{\rho,\sigma} \arrow[r] & 1\ , \end{tikzcd}$$

donc l'extension $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0]$ de $\Gamma_{\rho,\sigma}$ par $L_0^\natural$ s'identifie à l'extension $S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$ de $\Gamma_{\rho,\sigma}$ par $L_0^\natural$, i.e. à l'image inverse de l'extension $Z_{\rho,\sigma}$ de $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ par $L_0^\natural$, via l'homomorphisme canonique

`[page 643]`

$$\Gamma_{\rho,\sigma} \;=\; \mathcal{N}_\rho^\natural \times_{\Upsilon_{\rho,\sigma}} \mathcal{N}_\sigma^\natural \longrightarrow \Upsilon_{\rho,\sigma}\;. \tag{107}$$

Donc la donnée d'une section de $Z_{\rho,\sigma}$ sur $\Upsilon_{\rho,\sigma}$ (cf. à ce sujet p. 636 ff.) en définit une de $S_0\Gamma_{\rho,\sigma}$ sur $\Gamma_{\rho,\sigma}$, donc de $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0]$ sur $\Gamma_{\rho,\sigma}$. Quand une telle section est fixée, on dénote ce groupe section par

$$\mathcal{M}_{\rho,\sigma}(0) \;\subseteq\; \mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural\;,$$

donc on aura

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{\rho,\sigma}[0] & \simeq & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}(0)\cdot L_0^\natural \\ \mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural & \simeq & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}(0)\cdot \mathfrak{S}^\natural \\ \mathcal{M}_{\rho,\sigma} & \simeq & \mathcal{M}_{\rho,\sigma}(0)\cdot \mathfrak{S} \end{array}\right. \tag{108}$$

`[plutôt` $\mathcal{M}_{\rho,\sigma} \simeq \mathcal{M}_{\rho,\sigma}(0)\cdot\mathfrak{S}^+$`]`.

8°) Retour sur le cas universel, et l'homomorphisme $\mathcal{M}^\natural \longrightarrow \mathcal{M}_{\rho,\sigma}^\natural/\mu_\rho$.

Nous supposons maintenant que $\mathfrak{S}$ correspond au cas universel $\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z})^\wedge$, avec un $\mathfrak{S}^\natural$ quelconque. On va noter le cas universel par un indice 0 : $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_0^+$, $\mathfrak{S}_0^\natural$ etc. ([136]), et $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}'^\natural$ etc. se noteront $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}^\natural$ etc.

Je pose

$$\mathcal{M}^\natural \;=\; \left\{ u \in \mathcal{M} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{a)} & u(\rho) \text{ est } \mathfrak{S}^\natural\text{-conjugué à } \varepsilon_3[\tau](\rho) \\ \text{b)} & u(\sigma) \text{ est } \mathfrak{S}^\natural\text{-conjugué à } \varepsilon_2[\tau](\sigma) \\ \text{c)} & u(\varepsilon_0) \text{ est } \mathfrak{S}^\natural\text{-conjugué à } \varepsilon_0^\mu \\ \text{d)} & u \text{ stabilise } \mathcal{M}^\natural \end{array} \right\} \subseteq \mathcal{M} \qquad \texttt{[}^{137}\texttt{]}\;, \tag{107}$$

où bien sûr

$$\mu \;=\; \chi(u)\;, \qquad \varepsilon_2 \;=\; \varepsilon_2(u) \;=\; \varepsilon_2(\mu)\;, \qquad \varepsilon_3 \;=\; \varepsilon_3(u) \;=\; \varepsilon_3(\mu) \qquad (^{138})\;.$$

Je dis que $\mathcal{M}^\natural$ est un *sous-groupe* de $\mathcal{M}$. On peut le voir en reprenant les calculs de la p. 629 ff. Je préfère procéder ainsi.

`[page 644]`

On a vu qu'on a

$$Z_{\rho_0,\sigma_0} \hookrightarrow \mathcal{M}[0] \;=\; \mathcal{M}(0)\cdot L_0^{\mathfrak{S}} \;\simeq\; \mathcal{M}_{0,3}^\sim[0] = \mathcal{M}_{0,3}^\sim(0)\cdot L_0^{\mathfrak{S}_0}\;, \tag{108}$$

inclusion qui est une égalité si $\mathfrak{S}_0^\natural = \mathfrak{S}_0^+$, et qui identifie $Z_{\rho,\sigma}$ à $\mathcal{M}^![0] = \mathcal{M}(0)\cdot L_0^\pi$ si $\mathfrak{S}_0^\natural = \pi$ ou $= \pi_0$.

[136] Ou Z_{ρ_0,σ_0} etc. … On écrira $\mathfrak{S}_0^+$ au lieu de $\mathfrak{S}_0^{+\wedge}$.

[137] `[Saut dans la numérotation.]`

[138] **NB** $\mathcal{M}^\natural \supseteq \mu$.

$\Big[$ ([139]) En fait, si $\mathfrak{S}_0^\natural \subseteq \pi_0$, alors on trouve

$$(109) \qquad Z_{\rho,\sigma} = \left\{ u = \underbrace{u_0}_{\in \mathcal{M}(0)} \cdot \underbrace{l}_{\in L_0^\pi} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{a)} & u(\rho) = \alpha(\rho) \text{ avec } \alpha \in \mathfrak{S}_\tau^\natural \\ \text{b)} & u(\sigma) = \beta(\sigma) \text{ avec } \beta \in \mathfrak{S}_\tau^\natural \\ \text{c)} & u \text{ stabilise } \mathfrak{S}^\natural \end{array} \right\},$$

et on note que α, β dans a), b) sont déterminés par $u = u_0 l$ de façon unique, même si on suppose seulement $u \in \mathcal{M}^![0]$ sans plus, et qu'on exige $\alpha, \beta \in {\pi_0}_\tau$. On sait que c'est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_0^+) \times \hat{\mathbf{Z}}^* \times \mu \times \mu$ – et en fait, de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_0^+)$ (prop. p. 629). Comme ce groupe opère sur $\mathfrak{S}$ via $\mathcal{M}_{0,3}^\sim$, et même via $\mathcal{M}_{0,3}^{\sim!}[0]$, il s'envoie dans $\mathcal{M}_{0,3}^{\sim!}[0]$ par un homomorphisme de groupes, donc dans $\mathcal{M}^![0] \simeq \mathcal{M}_{0,3}^\sim[0]$ par un homomorphisme de groupes. $\Big]$

Considérons le système

$$(110) \qquad \Big(\mathfrak{S}_0^+,\ Z_{\rho_0,\sigma_0},\ L_0^\natural \hookrightarrow Z_{\rho_0,\sigma_0},\ Z_{\rho_0,\sigma_0} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_0),\ L_0^\natural \hookrightarrow \mathfrak{S}_0^+ \Big)$$

(cf. 'digression' plus bas, 9°)), qui donne naissance à

$$(110') \qquad G_{\rho_0,\sigma_0}, \qquad \mathfrak{S}_0^+ \subseteq G_{\rho_0,\sigma_0}, \qquad Z_{\rho_0,\sigma_0} \hookrightarrow G_{\rho_0,\sigma_0},$$

et considérons le système analogue à (110)

$$(111) \qquad \left(\mathfrak{S}_0^+,\ \underbrace{\mathcal{M}[0]}_{=\mathcal{M}(0)\cdot L_0^\pi},\ \underbrace{L_0^{\mathfrak{S}}}_{\text{(engendré par } \varepsilon_0)} \hookrightarrow \mathcal{M}[0],\ \mathcal{M}[0] \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_0),\ L_0^{\mathfrak{S}} \hookrightarrow \mathfrak{S}_0^+ \right),$$

qui donne naissance (loc. cit. (9°)) à la situation

$$(111') \qquad \big(\mathcal{M}, \qquad \mathfrak{S}_0^+ \subseteq \mathcal{M}, \qquad \mathcal{M}[0] \hookrightarrow \mathfrak{S}_0^+ \big).$$

Or grâce à (108), on a un homomorphisme de (110) dans (111), correspondant à l'identité sur $\mathfrak{S}_0^+$, (108) sur Z_{ρ_0,σ_0}, l'inclusion canonique $L_0^\natural \hookrightarrow L_0^{\mathfrak{S}}$. Il en résulte un homomorphisme de (110′) dans (111′), en particulier un homomorphisme canonique de suites exactes

[page 645]

$$(112) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathfrak{S}_0^+ & \longrightarrow & G_{\rho_0,\sigma_0} & \longrightarrow & \Upsilon_{\rho_0,\sigma_0} & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathfrak{S}_0^+ & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^\sim & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

où $\underbrace{\Upsilon_{\rho_0,\sigma_0}}_{\simeq Z_{\rho_0,\sigma_0}/L_0^\mu} \longrightarrow \underbrace{\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}}_{\simeq \mathcal{M}[0]/L_0^{\mathfrak{S}}}$ est aussi induit par (108), et s'identifie à

$$(113) \qquad Z_{\rho_0,\sigma_0}/L_0^\mu \longrightarrow \mathcal{M}[0]/L_0^{\mathfrak{S}}.$$

[139] Cette explicitation ne semble servir à rien.

Par définition même de $L_0^\natural$ comme étant essentiellement $Z_{\rho_0,\sigma_0} \cap \mathfrak{S}_0^+$, on voit que (113) est injectif, donc $G_{\rho_0,\sigma_0} \longrightarrow \mathcal{M}$ est toujours injectif (c'est un isomorphisme si $\mathfrak{S}_0^\natural \supseteq \pi_0 \ldots$). On déduit par composition de (112) un homomorphisme de suites exactes

(114)
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathfrak{S}_0^\natural \arrow[r] \arrow[d, equal] & G^\natural_{\rho_0,\sigma_0} \arrow[r] \arrow[d] & \Upsilon_{\rho_0,\sigma_0} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathfrak{S}_0^+ \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim} \arrow[r] & 1 \,. \end{tikzcd}$$

On voit alors immédiatement que l'image de $G^\natural_{\rho_0,\sigma_0}$ dans $\mathcal{M}$ n'est autre que $\mathcal{M}^\natural$ (107). On a donc

(115)
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \underbrace{\mathcal{M}^\natural}_{\text{défini dans (107)}} & \xrightarrow{\sim} & G^\natural_{\rho,\sigma} \\ \Upsilon_{\rho_0,\sigma_0} & \hookrightarrow & \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim} \end{array} \right. \qquad ({}^{140}) \,,$$

ce qui montre en même temps dans la foulée que $\mathcal{M}^\natural$ est bien un sous-groupe de $\mathcal{M}$.

On a maintenant

(117)
$$\mathcal{M}^\natural_{\rho_0,\sigma_0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}^\natural_{\rho_0} \times_{\Upsilon_{\rho_0,\sigma_0}} \mathcal{N}^\natural_{\sigma_0} \times_{\Upsilon_{\rho_0,\sigma_0}} \underbrace{G^\natural_{\rho_0,\sigma_0}}_{\simeq \mathcal{M}^\natural} \,,$$

où

$$\begin{aligned} G^\natural_{\rho_0,\sigma_0} &\simeq \mathcal{M}^\natural \,, \qquad \text{donc} \\ \mathcal{N}^\natural_{\rho_0} &\simeq \{u \in \mathcal{M}^\natural \mid u(\rho) = \rho^{\varepsilon_3(u)}\} \\ \mathcal{N}^\natural_{\sigma_0} &\simeq \{u \in \mathcal{M}^\natural \mid u(\sigma) = \sigma^{\varepsilon_2(u)}\} \,, \end{aligned}$$

et finalement on a

(118)
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}^\natural_{\rho_0,\sigma_0} \simeq \mathcal{N}_{\mathcal{M}^\natural}(\rho) \times_{\Gamma_0^\natural} \mathcal{N}_{\mathcal{M}^\natural}(\sigma) \times_{\Gamma_0^\natural} \mathcal{M}^\natural \,, \\ \text{où } \Gamma_0^\natural = \Upsilon_0 = \Upsilon_{\rho_0,\sigma_0} \subseteq \Gamma_{\mathbf{Q}}^{\sim} \,, \text{ explicité dans (116)} \,, \end{array} \right.$$

d'où une suite exacte

(119)
$$1 \longrightarrow \overbrace{SZ_{\rho_0} \times SZ_{\sigma_0}}^{= L_\rho \times L_\sigma} \longrightarrow \mathcal{M}^\natural_{\rho_0,\sigma_0} \longrightarrow \mathcal{M}^\natural \longrightarrow 1 \,,$$

où le noyau $SZ_{\rho_0} \times SZ_{\sigma_0}$ est un groupe tout petit, savoir

[140]**NB** On a

(116)
$$\Upsilon_{\rho_0,\sigma_0} = \mathbf{\Gamma}^\natural_{\mathbf{Q}} = \left\{ u \in \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{le relèvement } u_0 \text{ de } u \text{ en } u_0 \in \mathcal{M}(0) \\ \text{satisfait les conditions a) b) d) de (107)} \end{array} \right\}$$

(noté aussi $\Upsilon_0 = \Gamma_0^\natural$, si Γ_0 dénote $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Q}}^{\sim}$) ([141]).

[141]À vérifier.

[page 646]

$$(120)\qquad \mathrm{Ker}(\mathcal{M}^{\natural}_{\rho_0,\sigma_0} \xrightarrow{\text{épi}} \mathcal{M}^{\natural}) \;\simeq\; SZ_{\rho_0} \times SZ_{\sigma_0} \;\simeq\; L_\rho \times L_\sigma \;\simeq\; \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}\,.$$

Nous allons améliorer encore la situation en découpant dans $\mathcal{M}^{\natural}_{\rho_0,\sigma_0}$ un groupe encore plus petit, qui soit une extension de $\mathcal{M}^{\natural}$ par μ.

Notons que

$$(121)\qquad \mathcal{M}^{\natural}_{\rho_0,\sigma_0} \;=\; \mathcal{N}^{\natural}_{\rho_0} \times_{\Gamma_0^{\natural}} \mathcal{N}^{\natural}_{\sigma_0} \times_{\Gamma_0^{\natural}} \underbrace{G^{\natural}_{\rho_0,\sigma_0}}_{=\mathcal{M}^{\natural}} \;\subseteq\; \mathcal{N}^{\natural}_{\rho_0} \times_{\Gamma_0} \mathcal{N}^{\natural}_{\sigma_0} \times_{\Gamma_0} \mathcal{M}\;,$$

où $\Gamma_0 \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Gamma}_{\widetilde{\mathbf{Q}}}$, et où ce dernier produit fibré n'est autre que la quantité $\mathcal{M}^{(\natural')}_{\rho_0,\sigma_0}$ qui correspondrait au cas de $\mathfrak{S}_0^{\natural'} = \mathfrak{S}_0^{+}$ tout entier (noté $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ à la page 626 et suivantes). Dans ce groupe on a défini le sous-groupe, qui était noté $\mathcal{M}^{\natural}_{\rho,\sigma}$ à la page 626, et que je vais plutôt noter maintenant $\mathcal{M}^{?}_{\rho,\sigma}$, défini comme

$$(122)\qquad \mathcal{M}^{?} \;=\; \mathcal{N}^{?}_{\rho} \times_{\Gamma_0} Z^{!}_{\sigma\,0} \times_{\Gamma_0} \mathcal{M} \qquad [142]\;,$$

où, on rapelle,

$$(123)\qquad \begin{cases} \mathcal{N}_{\rho_0} \;=\; \mathrm{Norm}_{\mathcal{M}}(L_{\rho_0})\;, \qquad \mathcal{N}_{\sigma} \;=\; \mathrm{Norm}_{\mathcal{M}}(L_{\sigma_0})\;, \\ Z_{\sigma} \;=\; \mathrm{Centr}_{\mathcal{M}}(L_{\sigma_0}) \;=\; \mathrm{Centr}_{\mathcal{M}}(\sigma_0)\;, \\ \mathcal{N}^{?}_{\rho_0} \;=\; Z^{!}_{\rho_0}\cdot \mu_{\tau'} \;\subseteq\; \mathcal{N}_{\rho_0}\;, \qquad \text{où } Z^{!}_{\rho_0} \;=\; Z_{\rho_0}\cap \mathcal{M}^{!}\;, \\ \mathcal{N}^{?}_{\sigma_0} \;=\; Z^{!}_{\sigma_0}\cap \mathcal{M}^{!}_0 \;\;(=\mathcal{N}_{\sigma_0}\cap\mathcal{M}^{!}_0\,) \;\subseteq\; \mathcal{N}_{\sigma_0}\;, \end{cases}$$

de sorte qu'on a bien

$$\mathcal{M}^{?} \;\subseteq\; \mathcal{N}_{\rho_0} \times_{\Gamma_0} \mathcal{N}_{\sigma_0} \times_{\Gamma_0} \mathcal{M} \qquad ([143])\,.$$

Ceci rappelé, on va poser

$$(124)\quad \mathcal{M}^{\natural\,?}_{\rho_0,\sigma_0} \;=\; \mathcal{M}^{\natural}_{\rho_0,\sigma_0} \cap \mathcal{M}^{?} \;\subseteq\; \mathcal{M}^{\natural}_{\rho_0,\sigma_0} \qquad (\text{intersection dans } \mathcal{N}_{\rho_0} \times_{\Gamma_0} \mathcal{N}_{\sigma_0} \times_{\Gamma_0} \mathcal{M})\;,$$

et considérer l'homomorphisme induit par (119),

$$(125)\qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}^{\natural\,?}_{\rho_0,\sigma_0} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{M}^{\natural} \arrow[d, hook] \\ \mathcal{M}^{?} \arrow[r] & \mathcal{M}\,. \end{tikzcd}$$

---

[142] [Plutôt $\mathcal{N}^{?}_{\rho_0}$ comme premier facteur ? $Z^{!}_{\sigma_0\,0}$ comme deuxième ? - Questions similaires dans ce qui suit.]

[143] Indépendant du choix d'un $\mathfrak{S}^{\natural}$.

[page 647]

On a vu (p. 626, (55)) que $\mathcal{M}^? \longrightarrow \mathcal{M}$ fait de $\mathcal{M}^?$ une extension de $\mathcal{M}$ de noyau μ_ρ. Donc le noyau de $\mathcal{M}^?_{\rho_0,\sigma_0} \longrightarrow \mathcal{M}^\natural$ est égal à $\mu_\rho \cap \mathcal{M}^?_{\rho_0,\sigma_0}$, or il est clair que l'on a $\mu_\rho \subseteq \mathcal{M}^\natural_{\rho_0,\sigma_0}$, cf. (114), donc $\mu_\rho \subseteq \mathcal{M}^{\natural\,?}_{\rho_0,\sigma_0}$. On trouve donc un homomorphisme de suites exactes

(126)
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mu_\rho \arrow[r] \arrow[d, equal] & \overbrace{\mathcal{M}^?_{\rho_0,\sigma_0}}^{\subseteq \mathcal{M}^\natural_{\rho_0,\sigma_0}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{M}^\natural \arrow[d, hook] & \\
1 \arrow[r] & \mu_\rho \arrow[r] & \mathcal{M}^? \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & 1 \,,
\end{tikzcd}$$

et il reste à voir si l'homomorphisme

(∗)
$$\mathcal{M}^?_{\rho_0,\sigma_0} \longrightarrow \mathcal{M}^\natural$$

est un épimorphisme, et sinon, caractériser son image. Notons que la définition (124) donne aussi, compte tenu des expressions (118) pour $\mathcal{M}^\natural_{\rho_0,\sigma_0}$ et (122) pour $\mathcal{M}^?$

(127)
$$\mathcal{M}^{\natural\,?}_{\rho_0,\sigma_0} \;\simeq\; \mathcal{N}^{\natural\,?}_{\rho_0} \times_{\Gamma^\natural_0} Z^{\natural\,!}_{\sigma_0\,0} \times_{\Gamma^\natural_0} \mathcal{M}^\natural \qquad [144] \,,$$

où on a posé

(128)
$$\begin{cases} \mathcal{N}^{\natural\,?}_{\rho_0} \;=\; \mathcal{N}^?_{\rho_0} \cap \mathcal{N}^\natural_{\rho_0} \;=\; \mathcal{N}^?_{\rho_0} \cap \mathcal{M}^\natural \\ Z^{\natural\,!}_{\sigma_0\,0} \;=\; Z^!_{\sigma_0\,0} \cap \mathcal{N}^\natural_{\rho_0} \;=\; Z^!_{\sigma_0\,0} \cap \mathcal{M}^\natural \,, \end{cases}$$

et l'homomorphisme (∗) n'est autre que la troisième projection du produit fibré. Donc l'image de (∗) n'est autre que l'image inverse, dans $\mathcal{M}^\natural$, par $\mathcal{M}^\natural \longrightarrow \Upsilon_0 = \Upsilon_{\rho_0,\sigma_0}$ de l'image de

(∗∗)
$$\mathcal{N}^{\natural\,?}_{\rho_0} \times_{\Gamma^\natural_0} \mathcal{N}^{\natural\,!}_{\sigma_0\,0} \longrightarrow \Gamma^\natural_0 \;\; (\hookrightarrow \;\; \Gamma_0 \,) \,.$$

Il reste donc à montrer que cet homomorphisme est surjectif, ou encore que les homomorphismes

$$\begin{cases} \mathcal{N}^{\natural\,?}_{\rho_0} \longrightarrow \Gamma^\natural_0 \\ \mathcal{N}^{\natural\,!}_{\sigma_0\,0} \longrightarrow \Gamma^\natural_0 \end{cases}$$

sont surjectifs (le premier sera alors une extension de $\Gamma^\natural_0$ par μ_ρ, le deuxième un isomorphisme). Soit donc $u \in \Gamma^\natural_0$, provenant de $u \in \mathcal{M}^\natural \simeq G^\natural_{\rho,\sigma}$, satisfaisant donc aux conditions a), b), c), d) de (107). On voit donc qu'il existe $\beta_0 \in \mathfrak{S}^\natural_0 \subseteq \mathcal{M}^\natural$ tel que $\beta^{-1}u_0 \in \mathcal{N}(\sigma_0)$.

Ici j'ai arrêté les vérifications, pensant y revenir dans les jours suivants ; il s'avère que ce n'est pas urgent – il importait plutôt de développer le cas particulier 'tour de Fermat' pour préciser les idées du formalisme général des $\mathcal{M}_{\rho,\sigma}$ ...

[144] $\Upsilon_0 \;=\; \mathrm{Im}(\mathcal{M}^\natural) \;\subseteq\; \mathbf{\Gamma}^{\sim}_{\mathbf{Q}}$

[page 648]

9°) Digression de formalisme des groupes.

a Soient

$$(1) \qquad G\,, \qquad \mathfrak{S} \subseteq G\,, \qquad \mathcal{N} \overset{\varphi_{\mathcal{N}}}{\hookrightarrow} G\,, \qquad \text{d'où } S\mathcal{N} = \varphi^{-1}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathcal{N}$$

la situation d'un groupe G, sous-groupe invariant $\mathfrak{S}$, et sous-groupe $\mathcal{N}$ tels que

$$(2) \qquad \mathcal{N} \xrightarrow{\text{épi}} G/\mathfrak{S}\,, \qquad \text{i.e. } \mathcal{N}/S\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} G/\mathfrak{S}\,.$$

On va reconstituer cette situation à partir de la suivante :

$$(2) \qquad \mathfrak{S}\,,\ \ \mathcal{N}\,,\ \ S\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}\,,\ \ \mathcal{N} \xrightarrow{\theta} \mathrm{Aut}(\mathfrak{S})\,,\ \ S\mathcal{N} \xrightarrow{\varphi = \varphi_{S\mathcal{N}}} \mathfrak{S} \qquad [^{145}]\,,$$

où $\mathfrak{S}$, $\mathcal{N}$ sont des groupes, $S\mathcal{N}$ un sous-groupe distingué de $\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{S})$ un homomorphisme de groupes, i.e. une *action* de $\mathcal{N}$ sur $\mathfrak{S}$, enfin $S\mathcal{N} \longrightarrow \mathfrak{S}$ un homomorphisme de groupes. On suppose que

(3)
- a) l'action de $S\mathcal{N}$ sur $\mathfrak{S}$ induite par celle de $\mathfrak{S}$, soit aussi celle déduite de $S\mathcal{N} \longrightarrow \mathfrak{S}$, via l'opération adjointe de $\mathfrak{S}$, et
- b) $S\mathcal{N} \longrightarrow \mathfrak{S}$ est compatible avec [l']action de $\mathcal{N}$.

Il est clair comment (1) définit (2), montrons comment un système (2) permet de reconstituer un système (1). On part donc de (2), on pose

$$(4) \qquad S_0G = \mathcal{N} \cdot \mathfrak{S} \qquad \text{(semi-direct)}\,,$$

on définit un homomorphisme

$$(5) \qquad \begin{cases} S\mathcal{N} \overset{i}{\hookrightarrow} S_0G \\ u \longmapsto u \cdot \varphi(u)^{-1} = \varphi(u)^{-1} \cdot u \end{cases} \qquad (^{146})\,.$$

Vérifions que c'est un homomorphisme :

$$\begin{aligned}
i(u'u) &= (u'u)\varphi(u'u)^{-1} \\
i(u')i(u) &= u'\varphi(u')^{-1}u\varphi(u)^{-1} \\
&= u'u(\underbrace{u^{-1}\varphi(u')u}_{=\varphi(u^{-1})\varphi(u'^{-1})\varphi(u) \text{ par } (*)})\varphi(u^{-1}) \\
&= u'u\varphi(u^{-1}u'^{-1}\cancel{u}\,\cancel{u}^{-1}) \\
&= (u'u)\varphi((u'u)^{-1}) \\
&= (u'u)\varphi(u'u)^{-1}\,, \qquad \text{OK.}
\end{aligned}$$

---

[145] [Deux fois (2).]

[146] **NB** On a, par hypothèse (a), pour $u \in S\mathcal{N}$, $x \in \mathfrak{S}$

$$(*) \qquad u(x) = \underbrace{u\,x\,u^{-1}}_{\text{dans } S_0G = \mathcal{N}\cdot\mathfrak{S}} = \varphi(u)\,x\,\varphi(u)^{-1}\,,$$

donc si $x = \varphi(u)$, on a $u(x) = uxu^{-1} = x$, i.e. $x = \varphi(u)$ et u commutent.

On n'a pas encore utilisé le fait que $[S\mathcal{N}]$ soit distingué dans $\mathcal{N}$, et l'hypothèse (b) ; ceci implique que l'image de (4) est distinguée dans S_0G, car on a, si $a \in \mathcal{N}$, $u \in S\mathcal{N}$,

$$a(u \cdot \varphi(u)^{-1})a^{-1} \;=\; \underbrace{aua^{-1}}_{\in\, S\mathcal{N}} \cdot \underbrace{a\varphi(u^{-1})a^{-1}}_{=\,\varphi(au^{-1}a^{-1})} \,,$$

i.e. l'homomorphisme (5) commute aux actions de $\mathcal{N}$ sur $S\mathcal{N}$ et sur $S_0G \supseteq \mathcal{N}$, donc l'image de $S\mathcal{N}$ est normalisée par $\mathcal{N} \subseteq S_0G$. Il faut encore vérifier qu'elle est normalisée également par $\mathfrak{S}$, mais on a mieux : l'image de $S\mathcal{N} \xrightarrow{i} S_0G$ *commute* à $\mathfrak{S}$, i.e.

[page 649]

pour tout $u \in S\mathcal{N}$, $u\varphi(u)^{-1}$ induit l'opération triviale sur $\mathfrak{S}$ – ce qui est en effet trivial par (3 a).

On peut donc poser

(6) $$G \overset{\text{def}}{=} S_0G/i(S\mathcal{N}) \,,$$

on trouve alors un diagramme commutatif

(7) $$\begin{tikzcd} & \mathcal{N} \arrow[dr, "\varphi_{\mathcal{N}}"] & \\ S\mathcal{N} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, "\varphi_{S\mathcal{N}}"'] & & G \,, \\ & \mathfrak{S} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

on voit que l'image de $\mathfrak{S}$ dans G est un sous-groupe invariant, et que l'on a un isomorphisme aur les quotients

(8) $$\mathcal{N}/S\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} G/\mathfrak{S} \,,$$

ce qui implique que l'on a aussi un isomorphisme

(9) $$\mathrm{Ker}(S\mathcal{N} \xrightarrow{\varphi_{S\mathcal{N}}} \mathfrak{S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\mathcal{N} \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{N}}} G) \,,$$

donc

(10) $$\begin{array}{ccccl} \varphi_{\mathcal{N}} & : & \mathcal{N} \longrightarrow G & & \text{est un plongement} \\ & & \Updownarrow & & \\ \varphi_{S\mathcal{N}} & : & S\mathcal{N} \longrightarrow \mathfrak{S} & & \text{est un plongement .} \end{array}$$

On trouve ainsi des *équivalences de catégories* inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des situations (1), et celle des situations (2).

b Considérons maintenant une situation

(11) $$\begin{cases} G \,, \qquad \mathfrak{S} \subseteq G \,, \qquad (\varphi_i : \mathcal{N}_i \longrightarrow G)_{i\in I} \\ \text{d'où des } \; S\mathcal{N}_i \;=\; \varphi_i^{-1}(\mathfrak{S}) \,, \end{cases}$$

avec la condition

(12) $$\forall\, i \in I \,, \qquad \varphi_i \,:\, \mathcal{N}_i \longrightarrow G/\mathfrak{S} \;=\; \Upsilon \qquad \text{épimorphique ,}$$

peut-on la reconstituer à partir de

$$(13) \qquad \mathfrak{S} \, , \qquad (\, \mathcal{N}_i \, , \; S\mathcal{N}_i \, , \; \varphi_i \, , \; \theta_i \,)_{i \in I} \, ,$$

où pour tout $i \in I$, $(\mathcal{N}_i, S\mathcal{N}_i, \varphi_i, \theta_i)$ satisfait les conditions (3 a, b) – où bien sûr pour tout $i \in I$

$$(14) \qquad \theta_i \, : \, \mathcal{N}_i \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathfrak{S}) \, , \qquad \varphi_i \, : \, S\mathcal{N}_i \longrightarrow \mathfrak{S} \, .$$

Il est tentant de reconstituer G à l'aide de $\mathfrak{S}$ et des $\mathcal{N}_i$, comme une sorte de 'somme amalgamée' relative à

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{N}_i \arrow[dr, dotted] & \\
S\mathcal{N}_i \arrow[ur, hook, "\text{plongement}"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & G \, . \\
 & \mathfrak{S} \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

`[page 650]`

Mais il est plus raisonnable de dire que pour tout i, on reconstitue via $(\mathcal{N}_i, S\mathcal{N}_i, \varphi_i, \theta_i)$ la situation (pour i fixé)

(15)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_i \arrow[r] & G_i \; (\simeq G) \\
S\mathcal{N}_i \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathfrak{S} \, , \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

et qu'on reconstitue (11) lui-même en se donnant un *système transitif d'isomorphismes entre les* G_i *(*$i \in I$*), induisant l'identité sur* $\mathfrak{S}$. Une telle donnée implique en premier lieu la donnée d'un système transitif d'isomorphismes entre les

$$(16) \qquad \Upsilon_i \overset{\text{def}}{=} \mathcal{N}_i / S\mathcal{N}_i$$

– qu'on identifiera donc à un même groupe

$$(17) \qquad \Upsilon \, , \qquad \text{groupe quotient commun des } \mathcal{N}_i \text{ (par les } S\mathcal{N}_i) \, .$$

Identifions maintenant $G_i/\mathfrak{S} \simeq \Upsilon_i$ à Υ,

$$(18) \qquad G_i/\mathfrak{S} \simeq \Upsilon \, ,$$

et formons le produit fibré

$$(19) \qquad \mathcal{G} = \prod_{i \in I}{}_{\Upsilon} \, G_i \supseteq \mathfrak{S}^I \qquad ([147]) \, .$$

La donnée d'un système transitif d'isomorphismes entre les G_i, induisant l'identité sur les sous-groupes $\mathfrak{S}$, et compatible avec le système transitif d'isomorphismes déjà envisagé

[147] $\mathcal{G}$ est extension de Υ par $\mathfrak{S}^I$.

entre les $\Upsilon_i = \mathcal{N}_i/S\mathcal{N}_i \simeq G_i/\mathfrak{S}$, équivaut alors à la donnée d'un sous-groupe G de $\mathcal{G}$, satisfaisant les conditions

$$(20) \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad G \cap \mathfrak{S}^I = \text{diagonale } \delta(\mathfrak{S}) \text{ de } \mathfrak{S}^I \ , \\ \text{b)} \quad \text{L'homomorphisme } G \longrightarrow \Upsilon \text{ est épimorphique} \ . \end{cases}$$

En d'autres termes, on a construit à l'aide de (13) et des syèmes transitifs d'isomorphismes entre les Υ_i, une extension $\mathcal{G}$ de leur 'valeur commune' Υ par $\mathfrak{S}^I$ – et la structure supplémentaire $(*)$ est la 'restriction' de cette extension en une extension de Υ par le sous-groupe diagonal de $\mathfrak{S}^I$.