EXPOSÉ XVIII

THÉORÈME DE WEIL SUR LA CONSTRUCTION D'UN GROUPE À PARTIR D'UNE LOI RATIONNELLE

par Michael Artin

0. Introduction

632

Cet exposé est consacré au théorème bien connu de Weil [1] qui donne la construction d'une variété de groupe à partir d'une loi birationnelle. Il semble que la généralisation de ce résultat au cas où la base est le spectre d'un anneau de valuation discrète était déjà connue de plusieurs personnes, on peut par exemple voir [2]. Ici nous démontrerons le théorème pour un groupe plat et de présentation finie sur un préschéma de base quelconque S. Puisqu'on doit faire les hypothèses avec un peu plus de soin, l'énoncé n'est pas sous la forme donnée par Weil ; mais lorsque S est le spectre d'un corps on voit que la forme donnée ici est essentiellement équivalente à celle de Weil. Nous utilisons la suggestion suivante de Grothendieck : Étant donné un « germe de groupe » X sur un préschéma S, on doit construire le groupe comme quotient de $X \times_S X$ par une relation d'équivalence convenable.

1. « Rappels » sur les applications rationnelles

633

Soit X/S un préschéma relatif et $U \subseteq X$ un ouvert. On dit que U est *schématiquement dense dans* X *relativement à* S, ou que $U \hookrightarrow X$ est relativement schématiquement dense, si pour tout changement de base $S' \to S$ l'ouvert $U \times_S S'$ est schématiquement dense dans $X \times_S S'$. Pour la définition et les propriétés de cette notion on réfère à Exp. IX, § 4. (*)

Proposition 1.1. — (i) *Une intersection finie ainsi qu'une réunion d'une famille non vide d'ouverts schématiquement denses relativement à* S *est schématiquement dense relativement à* S.

(0) version du 8 mai 09

(*) cf. aussi EGA IV_3, 11.9 et 11.10 (notamment 11.10.8), où on dit « *universellement* schématiquement dense relativement à S ».

(ii) *Si* $U \subseteq X$ *est schématiquement dense relativement à* S *et si* $S \to T$ *est un morphisme, alors* $U_T \subseteq X_T$ *est schématiquement dense relativement à* T.

(iii) *Soient* $U \subseteq V \subseteq X$ *des immersions ouvertes. Pour que* U *soit schématiquement dense dans* X *relativement à* S*, il faut et suffit qu'il le soit dans* V *et que* V *le soit dans* X.

(iv) *Si* $U \subseteq X$ *et* $V \subseteq Y$ *sont relativement schématiquement denses, alors* $U \times_S V$ *est schématiquement dense dans* $X \times_S Y$ *relativement à* S.

Dans Exp. IX on trouve le critère suivant :

Proposition 1.2. — *Soit* X/S *localement de présentation finie et plat et soit* U *un ouvert de* X*. Si pour chaque* $s \in S$ *la fibre* U_s *est schématiquement dense dans* X_s*, alors* U *est schématiquement dense dans* X *relativement à* S.

En particulier :

Corollaire 1.3. — *Si* X/S *est localement de présentation finie et plat, et si chaque fibre* X_s *est « sans composante immergée », alors* U *est schématiquement dense dans* X *relativement à* S *si et seulement si pour chaque* $s \in S$*,* U_s *est dense dans* X_s *au sens topologique.*

634 On déduit facilement de la définition la

Proposition 1.4. — *Soit* $U \subseteq X$ *schématiquement dense relativement à* S *et soient* f*,* $g : X \to Y$ *deux morphismes de foncteurs au-dessus de* S*, où* Y *satisfait à une des conditions suivantes :*

(i) Y *est un préschéma au-dessus de* S *et chaque fibre* Y_s *est séparée.*

(ii) Y *est un préfaisceau* [(1)] *sur* S *tel que le morphisme diagonal* $Y \to Y \times_S Y$ *soit représentable par une immersion fermée.* [(2)]

Alors si $f = g$ *sur* U*, on a* $f = g$.

Démonstration. Dans le cas (i), le raisonnement standard après IX 4.1 montre que f et g sont égaux sur chaque fibre, donc le sous-préschéma $\mathrm{Ker}(f, g)$ de X est ensemblistement égal à X, donc est fermé, et comme il majore U, il est égal à X, i.e. $f = g$. Le cas (ii) se démontre comme dans *loc. cit.* [(3)]

Définition 1.5. — [(*)] Soient X un préschéma sur S et Y un préfaisceau sur S. On appelle *application rationnelle* $f : X \to Y$ *au-dessus de* S une classe d'équivalence de

[(*)] cf. EGA IV_4, 20.5, où on dit « pseudo-morphisme de X dans Y relativement à S », pour ne pas entrer en conflit avec EGA I, 7.12.

[(1)] N.D.E. : préciser pour quelle topologie : *a priori* (fpqc).

[(2)] N.D.E. : Rappelons ici la définition d'une immersion fermée. Un morphisme de S-foncteurs $F \to G$ est *relativement représentable* si pour tout S-morphisme $T \to G$, où T est un S–préschéma, le T-foncteur $F_T = F \times_S T$ est représentable par un T-préschéma. Un morphisme de S-foncteurs $F \to G$ est une *immersion ouverte* (resp. *fermée*) s'il est relativement représentable et si pour tout S-morphisme $T \to G$, où T est un S-préschéma, le T-morphisme $F_T \to T$ est une immersion ouverte (resp. fermée).

[(3)] N.D.E. : Détailler ce point. . .

morphismes $f : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ sur S, où U est un ouvert de X qui est schématiquement dense relativement à S, et où on pose $(f : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}) \sim (f' : \mathrm{U}' \to \mathrm{Y})$ si et seulement s'il existe un ouvert $\mathrm{U}'' \subseteq \mathrm{U}' \cap \mathrm{U}$, schématiquement dense relativement à S, tel que $f = f'$ sur U''.

Cette définition est faite d'une telle manière qu'on peut définir de façon évidente l'application rationnelle $f \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ pour toute extension de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Si U est un ouvert de X, on dit que l'application rationnelle f est *définie sur* U s'il existe un morphisme représentant f dont l'ensemble de définition contient U.

Définition 1.5.1. — [4] Si Y satisfait à une des conditions (i), (ii) de 1.4, il est clair qu'il existe un plus grand ouvert U de X tel que f soit définie sur U, et cet U est sisisch. dense rel.schématiquement dense relativement à S. On l'appelle *domaine de définition de f sur* S, et on le notera $\mathrm{Dom}(f)$.

Cette notion ne commute pas aux changements de base, mais on a

Proposition 1.6. — *Soiten* X *un* S*-préschéma et* Y *un* S*-foncteur vérifiant l'une des hypothèses* (i), (ii) *de* 1.4. *Soenit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application rationnelle au-dessus de* S, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme plat et localement de présentation finie, et* $f' = f \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$. 635
Alors

$$\mathrm{Dom}(f') = \mathrm{Dom}(f) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'$$

Démonstration. Posons $\mathrm{U} = \mathrm{Dom}(f)$. Il est clair que $\mathrm{V}' = \mathrm{Dom}(f')$ contient $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$. Soit V l'image de V', qui est un ouvert de X parce que $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est ouvert. Il faut démontrer que $\mathrm{V} = \mathrm{U}$, c'est-à-dire, il faut trouver un morphisme $\mathrm{V} \to \mathrm{Y}$ qui représente f. Posons $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$,

$$\mathrm{X}'' = \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'', \qquad \mathrm{U}'' = \mathrm{U} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'', \qquad \mathrm{V}'' = \mathrm{V}' \underset{\mathrm{V}}{\times} \mathrm{V}'.$$

Alors U'' est schématiquement dense dans X'' relativement à S'', donc U'' est schématiquement dense dans V'' relativement à S, puisque $\mathrm{U}'' \subseteq \mathrm{V}'' \subseteq \mathrm{X}''$. La restriction de $f' : \mathrm{V}' \to \mathrm{Y}'$ à U' est déduite de $f : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ par changement de base. Les deux morphismes $\mathrm{V}'' \to \mathrm{Y}$ déduits de g par changement de base sont égaux sur U'', donc sont égaux. Or puisque $\mathrm{V}' \to \mathrm{V}$ est plat et localement de présentation finie, il est fppf-couvrant (Exp. IV 6.3) et on trouve le morphisme $\mathrm{V} \to \mathrm{Y}$ par descente.

Nous allons nous servir fréquemment de la trivialité suivante :

Proposition 1.7. — *Soit* X/S *fidèlement plat, localement de présentation finie, et soit* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$ *un ouvert relativement schématiquement dense. Alors il existe une extension de base* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *qui est fppf-couvrante, et une section* $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ *qui est contenue dans* $\mathrm{U}(\mathrm{S}')$.

En effet, U/S est fppf-couvrant. On pose $\mathrm{S}' = \mathrm{U}$ et on prend comme section le S-graphe de l'inclusion de U dans X.

(4) N.D.E. : On a ajouté le numéro 1.5.1.

2. Détermination locale d'un morphisme de groupes

Soient G et H des groupes et soit $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{G}$ un sous-ensemble tel que $\mathrm{U}\cdot\mathrm{U} = \mathrm{G}$. Alors si f et g sont des homomorphismes de G dans H tels que $f = g$ sur U, on a $f = g$. De même :

Proposition 2.1. — *Soient* S *un site* (cf. Exp. IV [5]), G *un faisceau en groupes sur*S, *et* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{G}$ *un sous-faisceau d'ensembles tel que le morphisme* $\mathrm{U} \times \mathrm{U} \to \mathrm{G}$ *induit par la multiplication soit un* épimorphisme. *Alors si* f *et* g *sont des homomorphismes de* G *dans un faisceau en groupes* H *qui sont égaux sur* U*, on a* $f = g$*.*

636 ***Corollaire 2.2***. — *Soit* G *un* S*-préschéma en groupes localement de présentation finie et plat, soient* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{G}$ *un ouvert qui est relativement schématiquement dense, et* H *un faisceau en groupes sur* S *pour la topologie* fppf. *Alors tout homomorphisme* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *est déterminé par sa restriction à* U*.*

En effet, puisque G est plat sur S, la loi de composition dans G est un morphisme plat ($\mathrm{VI_B}$.9.2.xi) et il s'ensuit que $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \to \mathrm{G}$ est fidèlement plat et localement de présentation finie, donc fppf-couvrant, donc un épimorphisme.

Proposition 2.3. — *Soient* G *un préschéma en groupes localement de présentation finie et plat sur* S, $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{G}$ *un ouvert relativement schématiquement dense, et* H *un faisceau en groupes pour la topologie* fppf. On note m_{G} la multiplication de G et m_{H} celle de H.

Soit $\overline{f} : \mathrm{U} \to \mathrm{H}$ *un* S*-morphisme et supposons qu'il existe un ouvert relativement schématiquement dense* V *de* $m_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{U}) \cap \mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V} \arrow[r, "(\overline{f}\times\overline{f})|_{\mathrm{V}}"] \arrow[d, "m_{\mathrm{G}}"] & \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H} \arrow[d, "m_{\mathrm{H}}"] \\ \mathrm{U} \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathrm{H} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Alors il existe un morphisme de S*-groupes* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ (*nécessairement unique*) *prolongeant* $\overline{f}$*, dans chacune des situations suivantes :*

(i) H *est représentable.*

(ii) *Le morphisme diagonal* $\mathrm{H} \to \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ *est représentable par une immersion fermée.* [6]

(iii) *Pour chaque section* $a \in \mathrm{U(S)}$*, l'ouvert* $\mathrm{pr}_2\big((a \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}) \cap \mathrm{V}\big)$ *est relativement schématiquement dense dans* U [*]*, et cet énoncé reste vrai après tout changement de base* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

[*] ou dans G, ce qui revient au même en vertu de 1.1 (iv).

[5] N.D.E. : c.-à-d., une catégorie munie d'une topologie, cf. IV, § 4.2.
[6] N.D.E. : Voir la note en 1.4.

Démonstration. Notons d'abord que V est relativement schématiquement dense dans $G \times_S G$. En effet, V est relativement schématiquement dense dans

$$m_G^{-1}(U) \bigcap U \underset{S}{\times} G \bigcap G \underset{S}{\times} U$$

et les trois facteurs sont déduits de $U \subseteq G$ par un changement de base $G \times_S G \to G$ évident, ce qui implique l'assertion d'après 1.1.

Pour construire un morphisme $f : G \to H$ il suffit, puisque $U \times_S U \to G$ est fppf-couvrant, de trouver un morphisme de $U \times_S U$ dans H tel que les deux morphismes 637
induits sur $(U \times_S U) \times_G (U \times_S U)$ sont les mêmes.

Prenons $m_H \circ (\overline{f} \times \overline{f}) : U \times_S U \to H$. On doit vérifier que chaque fois qu'on a des sections $a, b, c, d \in U(S')$, $S' \to S$ arbitraire, telles que $ab = cd$, on a aussi $\overline{f}(a)\overline{f}(b) = \overline{f}(c)\overline{f}(d)$. Par hypothèse, c'est vrai si (a, d) et (c, d) sont contenus dans $V(S')$, puisque dans ce cas on a $\overline{f}(a)\overline{f}(b) = \overline{f}(ab)$ et $\overline{f}(c)\overline{f}(d) = \overline{f}(cd)$. Donc, c'est vrai chaque fois que $(a, b, c, d) \in (V \times_G V)(S')$.

Je dis que $V \times_G V$ est un ouvert de $(U \times_S U) \times_G (U \times_S U)$ schématiquement dense relativement à S. Cela achèvera la démonstration dans les cas (i) et (ii) d'après 1.4, les faits que le morphisme f ainsi construit étend $\overline{f}$ et que f est un homomorphisme étant évidents, aussi d'après 1.4.

Or, écrivons

$$V \underset{G}{\times} V = V \underset{G}{\times} (G \underset{S}{\times} G) \bigcap (G \underset{S}{\times} G) \underset{G}{\times} V.$$

Par symétrie et 1.1, il suffit de vérifier que $V \times_G (G \times_S G)$ est relativement schématiquement dense dans $(G \times_S G) \times_G (G \times_S G)$. Mais ce dernier préschéma est S-isomorphe à $G \times_S G \times_S G$, le morphisme étant donné par $(a, b, c, d) \mapsto (a, b, c)$. Donc ce qu'il faut démontrer est que $V \times_S G$ est schématiquement dense dans $G \times_S G \times_S G$ relativement à S, ce qui est conséquence du fait que V est relativement schématiquement dense dans $G \times_S G$.

Il reste à traiter le cas (iii). Pour démontrer $\overline{f}(a)\overline{f}(b) = \overline{f}(c)\overline{f}(d)$, il est permis de faire une extension de base fppf-couvrante. Supposons qu'on a une section $x \in G(S')$, $S' \to S$ fppf-couvrant, telle que (b, x), (a, bx), (d, x), (c, dx) sont tous dans V. Alors on aura

$$f(a)f(b)f(x) = f(a)f(bx) = f(abx) = f(cdx) = f(c)f(dx) = f(c)f(d)f(x),$$

d'où l'égalité cherchée.

[7] Pour trouver un tel x, posons, pour tout $z \in U(S')$,

$$V_z = \mathrm{pr}_2(z \underset{S'}{\times} U_{S'} \cap V_{S'}).$$

Alors, les hypothèses sur x veulent dire que $x \in W$, où

$$W = V_b(S') \bigcap V_d(S') \bigcap b^{-1}V_a(S') \bigcap d^{-1}V_c(S').$$

D'après (iii), W est relativement schématiquement dense dans G. Donc l'existence d'une section x après une extension fppf-couvrante découle de la proposition 1.7.

[7] N.D.E. : On a ajouté le début de la phrase qui suit.

Vérifions que le morphisme ainsi construit est multiplicatif : Soient $a, b \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ arbitraire, et notons $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Choisissons une extension de base fppf-couvrante $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et une section $x \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ telles que $x \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$ et $ax^{-1} \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$, c'est-à-dire $x \in (a^{-1}\mathrm{U})^{-1}(\mathrm{S}')$. Choisissons de plus une autre extension fppf-couvrante $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ et
638 une section $y \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$ telles que

$$y,\ by^{-1},\ aby^{-1} \qquad \text{appartiennent à} \quad \mathrm{U}(\mathrm{S}''),$$

et

$$by^{-1} \in \mathrm{V}_x, \qquad xby^{-1} \in \mathrm{V}_{ax}^{-1}.$$

Alors d'après la définition de f, on a sur S''

$$f(a) = \overline{f}(ax^{-1})\overline{f}(x), \qquad f(b) = \overline{f}(by^{-1})\overline{f}(y), \qquad f(ab) = \overline{f}(aby^{-1})\overline{f}(y).$$

De plus,

$$\begin{aligned} f(a)f(b) = \overline{f}(ax^{-1})\overline{f}(x)\overline{f}(by^{-1})\overline{f}(y) &= \overline{f}(ax^{-1})\overline{f}(xby^{-1})\overline{f}(y) \\ &= \overline{f}(aby^{-1})\overline{f}(y) = f(ab), \end{aligned}$$

d'où la multiplicativité.

Le fait que f étend $\overline{f}$ est maintenant facile : Soit $a \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$, notons $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$, et choisissons $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fppf-couvrant et des sections $x, y \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ telles que (x, y), (ax, y), (a, xy) sont dans $\mathrm{V}(\mathrm{S}')$. Alors

$$f(xy) = \overline{f}(x)\overline{f}(y) = \overline{f}(xy), \qquad f(axy) = \overline{f}(ax)\overline{f}(y) = \overline{f}(axy).$$

Donc

$$f(a) = f(axy)f((xy)^{-1}) = f(axy)f(xy)^{-1} = \overline{f}(axy)\overline{f}(xy)^{-1} = \overline{f}(a).$$

Remarque 2.3.1. — Dans beaucoup de cas l'hypothèse (iii) est vraie, car elle sera même vraie si l'on remplace U par un ouvert plus petit U′, encore relativement schématiquement dense dans G. Par exemple on a :

Proposition 2.4. — *La situation étant comme dans* 2.3*, supposons que chaque fibre géométrique de* G/S *soit* irréductible*. Soient* $\mathrm{U}' = \mathrm{pr}_1\mathrm{V}$ *et*

$$\mathrm{V}' = \mathrm{V} \bigcap m_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{U}') \bigcap (\mathrm{U}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{U}').$$

Alors $\mathrm{U}' \subseteq \mathrm{U}$ *est un ouvert relativement schématiquement dense de* G *et les objets* U'*,* $\overline{f}|_{\mathrm{U}'}$ *et* V' *satisfont à l'hypothèse* (iii).

Démonstration. U′ est ouvert parce que $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est plat et localement de présentation finie. Toutes les autres vérifications sont triviales sauf l'hypothèse (iii).

Soit $a \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$, notons $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Pour vérifier que $\mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{U}') \cap \mathrm{V}'\big)$ est relativement schématiquement dense dans U′, il suffit de le faire fibre par fibre d'après le corollaire 1.3, c'est-à-dire il suffit de traiter le cas où S est le spectre d'un corps, et dans ce cas il suffit de démontrer que U′ est non vide, parce que G est irréductible et « sans composantes immergées » (cf. $\mathrm{VI_A}$, 1.1.1). Or

$$\mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{U}') \cap \mathrm{V}'\big) = \mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{U}') \cap \mathrm{V}\big) \bigcap \mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{U}') \cap m_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{U}')\big)$$

et le deuxième terme du membre droit est dense dans G. Donc il suffit de démontrer que $\mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{U}') \cap \mathrm{V}\big)$ est dense dans G, c'est-à-dire, non vide, ce qui est clair car $a \in \mathrm{U}' = \mathrm{pr}_1\mathrm{V}$.

3. Construction d'un groupe à partir d'une loi rationnelle

639

3.0. On suppose donné un préschéma X/S et une application rationnelle $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ au-dessus de S, et on cherche un groupe G/S et une application *birationnelle* relativement à S [(8)]

$$\mathrm{X} \dashrightarrow \mathrm{G}$$

qui commute avec les lois de composition. Nous traitons seulement le cas où X/S vérifie l'hypothèse suivante :

$$(\diamondsuit)\qquad \begin{array}{l}\text{X/S est fidèlement plat, de présentation finie, et}\\ \text{à fibres séparées et « sans composantes immergées ».}\end{array}$$

(Notons que les deux dernières hypothèses sont des propriétés vraies pour un préschéma en groupes [(9)]).

Nous allons souvent supprimer le symbole S dans les produits fibrés.

Soit X/S un préschéma ayant les propriétés $(\diamondsuit)$ ci-dessus et soit W un sous-préschéma de présentation finie de $\mathrm{X} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ ayant la propriété suivante :

$$(*)\qquad \begin{array}{l}\text{Les trois morphismes } \mathrm{W} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X} \text{ donnés par les projections de } \mathrm{X}^3 \text{ sur } \mathrm{X}^2\\ \text{sont des immersions ouvertes schématiquement denses relativement à S.}\end{array}$$

Notations. — Nous allons utiliser la terminologie suivante : Étant donné des sections a, b, $c \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ arbitraire, telles que $(a, b, c) \in \mathrm{W}(\mathrm{S}')$, nous écrivons :

$$c = ab, \qquad b = a^{-1}c, \qquad a = cb^{-1}.$$

Définition 3.0.1. — [(10)] Nous disons, étant donné une section $(a, b) \in \mathrm{X}^2(\mathrm{S}')$, que ab est *défini* si, et seulement si, il existe une section $c \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ telle que $(a, b, c) \in \mathrm{W}(\mathrm{S}')$, i.e. si et seulement si (a, b) est dans $\mathrm{pr}_{12}\mathrm{W}(\mathrm{S}')$. De même, dire que $a^{-1}b$ ou ab^{-1} est défini a la significations analogue, et on étend cette terminologie aussi aux produits de plusieurs facteurs.

Remarque 3.0.2. — Notons tout de suite le fait suivant : D'après (i), W définit une application rationnelle $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{X}$ au-dessus de S (celle donnée par $(a, b) \mapsto ab$). Il peut bien arriver que cette application rationnelle ait un domaine de définition plus grand que $\mathrm{pr}_{12}\mathrm{W}$. Néanmoins, nous disons que ab est défini seulement si $(a, b) \in \mathrm{pr}_{12}\mathrm{W}(\mathrm{S}')$.

Définition 3.1. — Un *germe de groupe* est un préschéma X/S ayant les propriétés 640

(8) N.D.E. : Expliciter la notion d'application birationnelle (relativement à S), peut-être dans un ajout 1.5.2 ?

(9) N.D.E. : cf. VI_{A}, à préciser . . .

(10) N.D.E. : On a introduit la numérotation 3.0.1 et 3.0.2.

($\diamondsuit$) ci-dessus et un sous-préschéma de présentation finie W de $X \times X \times X$ ayant les propriétés suivantes :

(i) W vérifie la propriété ($*$) ci-dessus.

(ii) Pour chaque section $a \in X(S)$, les ensembles

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}_i\big((a \times X \times X) \cap W\big), \qquad && i = 2, 3,\\ &\mathrm{pr}_i\big((X \times a \times X) \cap W\big), \qquad && i = 3, 1,\\ &\mathrm{pr}_i\big((X \times X \times a) \cap W\big), \qquad && i = 1, 2,\end{aligned}$$

sont schématiquement denses dans X relativement à S, et cet énoncé reste vrai après tout changement de base $S' \to S$. (L'hypothèse (i) implique que ces ensembles sont des ouverts de X.) Intuitivement, cela veut dire que « ax est défini pour x assez général », etc.

(iii) La loi est *associative*, c'est-à-dire, si $(a, b, c) \in X^3(S')$, $S' \to S$ arbitraire, est tel que $(ab)c$ et $a(bc)$ sont définis, on a $(ab)c = a(bc)$.

Remarques. — (a) On peut remplacer dans (i) la condition W schématiquement dense dans X^2 relativement à S par la condition que pour chaque $s \in S$ la fibre W_s est dense dans X_s^2 au sens topologique, grâce aux hypothèses faites sur X et à 1.2.

(b) La condition (iii) équivaut à la suivante : Soit V_1 (resp. V_2) l'ouvert de X^3 où l'application rationnelle $(a, b, c) \mapsto a(bc)$ (resp. $(a, b, c) \mapsto (ab)c$) est définie [(*)]. Alors, il existe un ouvert $V \subseteq V_1 \cap V_2$ qui est schématiquement dense dans X^3 relativement à S tel que les deux applications précédentes coïncident sur V. C'est une conséquence de 1.4 parce que, bien entendu, V_1 et V_2 sont schématiquement denses dans X^3 relativement à S.

(c) L'hypothèse (ii) servira plus bas à assurer que X sera un *sous-objet* du préschéma en groupes qu'il définit. Dans beaucoup de cas on peut déduire (ii) à partir de (i), à condition de remplacer X par un ouvert X′ relativement schématiquement dense, et W par un ouvert relativement schématiquement dense de $W \cap X'^3$. On a en fait :

Proposition 3.2. — *Supposons que chaque fibre géométrique de* X/S *soit* irréductible *et soit* W *un sous-préschéma de* X^3 *qui satisfait à la condition* (i) *de* 3.1. *Alors il existe un ouvert* X′ *de* X *relativement schématiquement dense et un ouvert* W′ *de* $W \cap (X' \times X')$ *relativement schématiquement dense tels que le couple* (X', W') *satisfasse aux conditions* (i) *et* (ii). *Si* (iii) *est vérifié pour* (X, W), *elle l'est pour* (X', W').

641 *Démonstration*. Posons $X' = \bigcap_{i=1}^{3} \mathrm{pr}_i W$. Chaque $\mathrm{pr}_i W$ est ouvert dans X parce que $W \to X^2$ est une immersion ouverte et que les projections $X^2 \to X$ sont plates et de présentation finie. De plus, $\mathrm{pr}_i W$ est relativement schématiquement dense dans X parce que W l'est dans X^2 et les projections $X^2 \to X$ sont surjectives (il suffit de vérifier la densité au sens topologique). Prenons $W' = W \cap X'^3$.

[(*)] Au sens expliqué dans 3.0.1 ; on pourrait aussi remplacer ces ouverts par les domaines de définition (cf. 1.5) des applications rationnelles envisagées.

Pour vérifier que (i) est vraie, notons que

$$\mathrm{W}' = \big(\mathrm{W} \cap (\mathrm{X}' \times \mathrm{X}' \times \mathrm{X}\big) \bigcap \big(\mathrm{W} \cap (\mathrm{X} \times \mathrm{X}' \times \mathrm{X}')\big) \bigcap \big(\mathrm{W} \cap (\mathrm{X}' \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}')\big).$$

Or $\mathrm{W} \cap (\mathrm{X}' \times \mathrm{X}' \times \mathrm{X}) \simeq \mathrm{pr}_{12}\mathrm{W} \cap \mathrm{X}' \times \mathrm{X}'$, donc est relativement schématiquement dense dans W. De même, les autres termes du membre de droite sont relativement schématiquement denses dans W, et par suite W′ est relativement schématiquement dense dans W. Donc $\mathrm{pr}_{ij}\mathrm{W}'$ est relativement schématiquement dense dans $\mathrm{pr}_{ij}\mathrm{W}$, donc dans $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, donc dans $\mathrm{X}' \times \mathrm{X}'$.

Pour vérifier la condition (ii), soit $a \in \mathrm{X}'(\mathrm{S}')$, et notons $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Il nous faut démontrer que, par exemple, $\mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{X}' \times \mathrm{X}') \cap \mathrm{W}'\big)$ est schématiquement dense dans X′ relativement à S. D'après 1.3, il suffit de le vérifier fibre par fibre, c'est-à-dire qu'il suffit de traiter le cas où S est le spectre d'un corps, et dans ce cas, il suffit de vérifier que l'ouvert est non-vide, parce que les fibres de X/S sont irréductibles et « sans composantes immergées ». Puisque $\mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}) \cap \mathrm{W}\big)$ est non-vide, a étant section de X′, cet ouvert est dense dans X. On a

$$\mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}) \cap \mathrm{W}\big) = \mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{X}) \cap \mathrm{pr}_{12}\mathrm{W}\big).$$

Donc,

$$\mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{X}) \cap \mathrm{pr}_{12}\mathrm{W}\big) \cap \mathrm{X}' = \mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{X}') \cap \mathrm{pr}_{12}\mathrm{W}\big) = \mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{X}' \times \mathrm{X}) \cap \mathrm{W}\big)$$

est dense dans X, donc dans X′.

De même, $\mathrm{pr}_3(a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}' \cap \mathrm{W})$ est dense dans X, donc dans $\mathrm{pr}_3(a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \cap \mathrm{W})$, c'est-à-dire, $(a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}' \cap \mathrm{W})$ est dense dans $(a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \cap \mathrm{W})$, c'est-à-dire, $\mathrm{pr}_2(a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}' \cap \mathrm{W})$ est dense dans $\mathrm{pr}_2(a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \cap \mathrm{W})$, donc dense dans X, donc dense dans X′.

Or puisque

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_2(a \times \mathrm{X}' \times \mathrm{X}' \cap \mathrm{W}') &= \mathrm{pr}_2(a \times \mathrm{X}' \times \mathrm{X}' \cap \mathrm{W})\\ &= \mathrm{pr}_2(a \times \mathrm{X}' \times \mathrm{X} \cap \mathrm{W}) \cap \mathrm{pr}_2(a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}' \cap \mathrm{W}),\end{aligned}$$

il est bien dense dans X′, ce qu'il fallait démontrer. Les autres assertions de (ii) suivent par symétrie, et le fait que la condition (iii) est préservée est trivial. [11] La proposition 3.2 est démontrée.
[12]

3.2.1. — Fixons maintenant un germe de groupe (X, W) au dessus de S. Il nous faut 642
faire des remarques préliminaires sur la situation, que nous avons réunies ci-dessous. Nous utiliserons ces règles souvent sans mention explicite dans la suite.

Soit $a \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$, et notons $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Alors on obtient une application (bi)rationnelle φ au-dessus de S de X dans lui-même en faisant correspondre à une section x la section ax si elle est définie. D'après 3.1 (ii), le domaine de définition de φ contient l'ouvert relativement schématiquement dense $\mathrm{pr}_2\big((a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}) \cap \mathrm{W}\big)$, et φ définit un isomorphisme de cet ouvert sur l'ouvert (où $a^{-1}x$ est défini) $\mathrm{pr}_3\big((a \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}) \cap \mathrm{W}\big)$. Cette remarque est généralisée de la façon évidente dans la règle 1.

---

[11] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[12] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 3.2.1, ainsi que 3.2.2.

Règle 1. — Soit $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x, t_1, \ldots, t_n)$ un « produit » des symboles x, $t_1, \ldots, t_n$ obtenu récursivement de la manière suivante : $\mathrm{P}_0 = x$; P_{i+1} = une des expressions suivantes :

$$\mathrm{P}_i\, t, \qquad t\,\mathrm{P}_i, \qquad \mathrm{P}_i^{-1} t, \qquad t\,\mathrm{P}_i^{-1}, \qquad \mathrm{P}_i\, t^{-1}, \qquad t^{-1}\mathrm{P}_i,$$

où t est un des t_j ; $\mathrm{P}_r = \mathrm{P}$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$. Alors il existe un ouvert relativement schématiquement dense U de $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}$ tel que le produit $\mathrm{P}(x, a_1, \ldots, a_n)$ est défini (au sens de la remarque 3.0.2) pour une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ si et seulement si $x \in \mathrm{U}(\mathrm{S}'')$, et l'application $x \to \mathrm{P}(x, (a))$ donne un isomorphisme de U sur un autre ouvert relativement schématiquement dense, noté $\mathrm{P}(\mathrm{U}, (a))$, de $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}$.

Règle 2. — Soient a, $b \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$. Alors :
Si ab est défini, il en est de même de $a^{-1}(ab)$, et $a^{-1}(ab) = b$.
Si $a^{-1}b$ est défini, il en est de même de $a(a^{-1}b)$, et $a(a^{-1}b) = b$.
Si ba^{-1} est défini, il en est de même de $(ba^{-1})a$, et $(ba^{-1})a = b$.

Règle 3. — Soient a, b, $b' \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$. Si $ab = ab'$, si $ba = b'a$, si $a^{-1}b = a^{-1}b'$ ou si $ba^{-1} = b'a^{-1}$, alors $b = b'$. Ici il est sous-entendu que la relation d'égalité implique que les deux côtés sont définis.

Règle 4. — Soient a, b, $c \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$. Alors chaque fois que les deux côtés sont définis, on a

$$a\big((ba)^{-1}c\big) = b^{-1}c.$$

643 De même :

$$\big(c(ab)^{-1}\big)a = cb^{-1}, \qquad a^{-1}\big((ab^{-1})c\big) = b^{-1}c, \qquad \big(c(b^{-1}a)\big)a^{-1} = cb^{-1}.$$

Règle 5. — Toutes les lois d'associativité suivantes sont vraies, chaque fois que les deux côtés sont définis :

$$(a^{-1}b)c = a^{-1}(bc), \qquad (ab^{-1})c = a(b^{-1}c), \qquad (ab)c^{-1} = a(bc^{-1}),$$
$$(ab)^{-1}c = b^{-1}(a^{-1}c), \qquad (a^{-1}b)c^{-1} = a^{-1}(bc^{-1}), \qquad (ab^{-1})c^{-1} = a(cb)^{-1}.$$

3.2.2. Vérification des règles. — (1) se fait par récurrence évidente sur la longueur r de P, le cas $r = 1$ étant conséquence directe de (3.1) (ii).

(2) C'est trivial d'après la définition.

(3) En effet, d'après la règle 2, par exemple dans le premier cas, ona

$$b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ab') = b'.$$

(4) Vérifions par exemple la première relation : du côté droit la multiplication à gauche par b est définie et donne c, d'après la règle 2. Supposons qu'elle soit aussi définie du côté gauche. Alors on aura

$$b\Big(a\big((ba)^{-1}c\big)\Big) = (ba)\big((ba)^{-1}c\big) = c.$$

En effet (ba) est défini par hypothèse parce qu'il figure dans l'expression. Donc le membre du milieu est défini et égal à c d'après la règle 2, et égal au membre de gauche par associativité (cf. 3.1 (iii)). Donc la règle 3 implique que l'égalité cherchée est vraie si cette multiplication par b est définie.

Or, fixons a et b. Alors la règle 1 implique que $b\big(a((ba)^{-1}c)\big)$ est bien défini pour c « dans » un ouvert U de X relativement schématiquement dense, donc dans cet ouvert relativement schématiquement dense les deux applications rationnelles $c \mapsto b^{-1}c$ et $c \mapsto a\big((ba)^{-1}c\big)$ sont égales. D'après 1.4, elles sont égales sur chaque domaine commun de définition, d'où le résultat cherché.

(5) C'est le même genre de raisonnement que le précédent. Par exemple on vérifie $(ab^{-1})c^{-1} = a(cb)^{-1}$ de la manière suivante : Si la multiplication à droite par c est définie du côté droit, on a égalité d'après la règle 4. Comme il suffit de vérifier une telle formule sur un ouvert relativement schématiquement dense, on se réduit au cas où cette multiplication est bien définie. **644**

3.2.3. — Considérons maintenant la relation R sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ obtenue en posant, pour $a, b, a', b' \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$, $(a, b) \sim (a', b')$ modulo $\mathrm{R}(\mathrm{S}')$ si, et seulement si, il existe un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ couvrant pour fppf et une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ tels que $(xa)b$ et $(xa')b'$ soient définis et égaux. Alors R est une relation d'équivalence.

En effet, cette relation est évidemment symétrique. D'après la règle 1, le produit $(xa)b$ est défini si x est « dans » un ouvert relativement schématiquement dense convenable. Donc 1.7 affirme qu'il existe un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ couvrant pour fppf et un $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ tels que $(xa)b$ soit défini. La relation est donc réflexive, et la transitivité est conséquence du lemme suivant :

Lemme 3.3. — *Soient x, y, a, b, a', b', des sections de* $\mathrm{X}(\mathrm{S}')$ *tels que $(xa)b$, $(xa')b'$, $(ya)b$, $(ya')b'$ soient définis. Si $(xa)b = (xa')b'$ alors $(ya)b = (ya')b'$.*

En effet, le lemme dit qu'on peut tester $(a, b) \sim (a', b')$ avec un $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fppf-couvrant, arbitraire tel que les deux produits soient définis. Étant donné a, b, a', b', a'', $b'' \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$, on peut, d'après la règle 1, 1.1 et 1.7, trouver une extension $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fppf-couvrante et une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ telles que les trois produits en cause soient définis, d'où la transitivité.

Démonstration du lemme. Écrivons formellement pour commencer :

$$(za)b = \Big(\big((zx^{-1})x\big)a\Big)b = \big((zx^{-1})(xa)\big)b = (zx^{-1})\big((xa)b\big)$$
$$(za')b' = \Big(\big((zx^{-1})x\big)a'\Big)b' = \big((zx^{-1})(xa')\big)b' = (zx^{-1})\big((xa')b'\big)$$

On vérifie que ces égalités sont bien vraies si les membres sont définis, d'après les règles appropriées [(13)]. Il suit que $(za)b = (za')b'$ si toutes ces expressions sont définies. De plus, d'après la règle 1 et les hypothèses déjà faites, ces expressions sont bien **645** définies si $z \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ est dans $\mathrm{V}(\mathrm{S}'')$, où V est un certain ouvert de X relativement schématiquement dense (nous avons pris $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$). Donc les deux applications rationnelles de X dans lui-même données par $z \mapsto (za)b$ et $z \mapsto (za')b'$ sont égales, d'où $(ya)b = (ya')b'$.

[(13)] N.D.E. : à préciser...

Lemme 3.4. — *Considérons l'application rationnelle* $\varphi : \mathrm{X}^3 \to \mathrm{X}$ *au-dessus de* S *définie par* $(a, b, c) \mapsto c^{-1}(ab)$*. Soit* U *le domaine de définition de* φ *et considérons le graphe* Γ *du morphisme* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ *induit par* φ*, qui est un sous-schéma de* X^4*. Alors une section* $(a, b, c, d) \in \mathrm{X}^4(\mathrm{S})$ *est dans* $\Gamma(\mathrm{S})$ *si et seulement si* $(a, b) \sim (c, d)$*.*

Démonstration. Notons d'abord que l'application rationnelle φ est la même que celle qui est donnée par la formule $(a, b, c) \mapsto (xc)^{-1}((xa)b)$ pour une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ arbitraire. Il revient au même de dire qu'on a $c^{-1}(ab) = (xc)^{-1}((xa)b)$ chaque fois que les deux côtés sont définis. Nous laissons la vérification au lecteur.

Montrons alors que l'application φ est définie pour une section $(a, b, c) \in \mathrm{X}^3(\mathrm{S})$ si et seulement s'il existe d avec $(a, b) \simeq (c, d)$ et qu'alors $d = \varphi(a, b, c)$. En effet supposons qu'on ait $(a, b) \sim (c, d)$. Pour vérifier que l'application φ est définie, il est permis de faire une extension de base fppf-couvrante (proposition 1.6), et on peut donc supposer qu'il existe une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ telle que $(xa)b$ et $(xc)d$ soient définis et égaux. Il s'ensuit (règle 2) que $(xc)^{-1}((xa)b)$ est défini et égal à d.

Inversement, supposons l'application φ définieen la section (a, b, c) et soit $d = \varphi(a, b, c)$. Choisissons un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fppf-couvrant et une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ tels que $(xa)b$ et $(xc)d$ soient définis. Nous voulons montrer qu'ils sont égaux. Pour cela, il suffit de démontrer que les deux applications rationnelles au-dessus de S de X dans lui-même, données par $b \mapsto (xa)b$ et $b \mapsto (xc)\varphi(a, b, c)$ sont les mêmes, ce qui suit de la remarque du premier paragraphe.

646 ***Proposition 3.5***. — *La relation d'équivalence* $\mathrm{R} \rightrightarrows \mathrm{X}^2$ *est représentable et c'est une relation plate et de présentation finie, c'est-à-dire, les projections de* R *sur* X^2 *sont des morphismes plats et de présentation finie.*

Démonstration. On peut supposer S affine. Puisque (X, W) est de présentation finie sur S on peut descendre toute la situation à un S de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$, et donc noethérien. Nous pouvons donc supposer que S est noethérien. Alors il est trivial que le graphe Γ de (3.4) est de présentation finie au-dessus de X^2. La projection $\mathrm{pr}_{12}|\Gamma$ est plate parce que $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_{123}\Gamma$, qui est un ouvert de X^3, et que la projection $\mathrm{pr}_{12} : \mathrm{X}^3 \to \mathrm{X}^2$ est plate parce que X est plat au-dessus de S.

Je dis que Γ représente R. Notons qu'il y a quelque chose à démontrer parce que le domaine de définition d'une application rationnelle ne commute pas en général aux extensions de base. Soit $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$. Ce qui est clair, d'après (3.4) appliqué à S'', est que $\mathrm{R}(\mathrm{S}'') \supset \Gamma(\mathrm{S}'')$, parce que $\varphi \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$ est certainement définie sur $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$. Soit donc $(a, b, c, d) \in \mathrm{R}(\mathrm{S}'')$. Il faut démontrer que $(a, b, c, d) \in \Gamma(\mathrm{S}'')$. La vérification de cela se fait localement pour, disons, la topologie étale. On peut donc supposer S'' strictement local, i.e. , le spectre d'un anneau hensélien, à corps résiduel séparablement clos. De plus, en appliquant (1.6) et les sorites habituels de passage à la limite, on se réduit au cas S strictement local et $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$ local. Supposons qu'on ait une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ telle que sur S'' les produits $(xa)b$ et $(xc)d$ soient définis. Ça impliquera que $(xc)^{-1}((xa)b)$ est défini, et égal à d. Or il existe un ouvert V de X^3 relativement sch. dense tel que $(xc)^{-1}((xa)b)$ soit défini si et seulement si $(a, b, c) \in \mathrm{V}(\mathrm{S}'')$, et on a $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{U}$. Donc $(a, b, c, d) \in \Gamma(\mathrm{S}'')$ si un tel x existe. D'après (1.6) il est permis de faire une extension de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fppf-couvrante pour trouver un tel x. Puisque S est strictement local, on peut [(*)] trouver un $S' \to S$ fidèlement plat, local, et fini et une section $x \in X(S')$ qui « passe par » un point fermé arbitraire de la fibre fermée de X/S. Or dire que $(xa)b$ et $(xc)d$ sont définis veut dire que sur S'', x est dans un certain ouvert relativement sch. dense, ce qui se vérifie sur la fibre fermée de $X_{S''}$. Donc ça marche.

Soit maintenant G le quotient de X^2 par R en tant que faisceau pour la topologie fppf. On va définir une loi de composition sur G de la manière suivante : Soit $(g, g') \in G(S')$ représenté par une section $((a, b), (c, d))$ de $X^2 \times X^2(S'')$, $S'' \to S'$ fppf-couvrante. On suppose de plus que X admet une section x au-dessus de S'' telle que $a(b(cx))$ et $x^{-1}d$ soient définis, ce qui est permis d'après la règle 1 et (1.7), et on appelle gg' la classe dans $G(S')$ représentée par la section $(a(b(cx)), x^{-1}d)$ de $X^2(S'')$. 647

Vérifions que gg' ne dépend pas du choix de la section x et du représentant $((a, b), (c, d))$: Soient en effet $(a', b') \sim (a, b)$, $(c', d') \sim (c, d)$, et x tels que $a'(b'(c'x'))$ et ${x'}^{-1}d'$ soient définis. Nous pouvons supposer que tous sont des sections au-dessus de S''. On doit démontrer que

$$(a(b(cx)), x^{-1}d) \sim (a'(b'(c'x')), {x'}^{-1}d'),$$

c'est-à-dire que pour une section convenable $z \in X(S''')$, $S''' \to S''$ fppf-couvrante convenable, on a

$$(z(a(b(cx))))(x^{-1}d) = (z(a'(b'(c'x'))))({x'}^{-1}d').$$

Chaque fois que tous les produits sont définis, on a

$$\begin{aligned} (z(a(b(cx))))(x^{-1}d) &= ((za)(b(cx)))(x^{-1}d) = \\ = (((za)b)(cx))(x^{-1}d) &= ((((za)b)c)x)(x^{-1}d) = \\ = (((za)b)c)(x(x^{-1}d)) &= (((za)b)c)d, \end{aligned}$$

et les mêmes identités sont vraies avec les primes. Or, d'après la règle 1 et (1.7) il existe un tel z. On doit donc démontrer que

$$(((za)b)c)d = (((za')b')c')d'.$$

Mais $(za)b = (za')b'$ parce que $(a, b) \sim (a', b')$ (3.3) et on a donc l'égalité cherchée parce que $(c, d) \sim (c', d')$.

Considérons le morphisme naturel $i : X \to G$ défini de la manière suivante : Pour $a \in X(S')$, on choisit un $S'' \to S'$ fppf-couvrant et une section $b \in X(S'')$ tels que ab^{-1} soit défini, et on pose 648

$$i(a) = \text{ classe dans G de } (ab^{-1}, b).$$

On vérifie aisément que cette classe, qui est a priori dans $G(S'')$, ne dépend pas du choix de b et donne donc un élément bien déterminé de $G(S')$.

Le lecteur se fera le plaisir de vérifier la

Proposition 3.6. — *Le morphisme i commute aux lois de composition de* X *et de* G, *c.-à-d., si a, $b \in X(S')$ sont des sections telles que ab est défini, on a $i(a)i(b) = i(ab)$.*

[(*)]conjuguant Exp. VI_A, 1.1.1 et EGA IV_4, 17.16.2.

Le but de ce numéro est le théorème suivant :

Théorème 3.7. — [14] *Soit* (X, W) *un germe de groupe au-dessus de* S, *avec* X/S *fidèlement plat, de présentation finie, et à fibres séparées et sans composante immergée. Alors avec les notations ci-dessus on a*

(i) G *est un faisceau en groupes.*

(ii) $i : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est représentable par une immersion ouverte.*

(iii) G *est représentable localement sur* S *pour la topologie* fppf.

(iv) *Si* G/S *est représentable, alors c'est un groupe plat et de présentation finie, et* $i : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est schématiquement dense relativement à* S.

Notons que G est évidemment caractérisé par les propriétés (i), …, (iv) ; on peut donc oublier la construction explicite de G.

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

Lemme 3.8. — (i) *Soit* c *une section de* X(S), *alors le morphisme du préschéma* $c \times \mathrm{X}$ (*qui est* S*-isomorphe à* X) *dans* G *donné par* $c \times \mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *est un monomorphisme.*

649 (ii) *Soient* $\{c_i\}$, $i \in \mathrm{I}$, *des sections de* X(S), *soit* $\mathrm{Z} = \coprod_i c_i \times \mathrm{X}$, *et appelons* $\mathrm{R}' \rightrightarrows \mathrm{Z}$ *la relation d'équivalence induite sur* Z *par le morphisme évident* $\mathrm{Z} \to \mathrm{X}^2$. *Alors* R' *est un « recollement » des* $c_i \times \mathrm{X} \simeq \mathrm{X}$.

Démonstration.

(i) Pour que deux sections (c, a) et (c, a') de $(c \times \mathrm{X})(\mathrm{S}')$ aient même image dans G, on doit avoir $(c, a) \sim (c, a')$, c'est-à-dire, $(xc)a \sim (xc)a'$ pour $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ convenable, $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ fppf-couvrante, d'où $a = a'$ par la règle 3.

(ii) Soient c_i, c_j deux sections et considérons l'application birationnelle ψ_{ji} de X en lui-même au-dessus de S qui est donnée par la formule $x \mapsto c_j^{-1}(c_i x)$. C'est la même application que celle donnée par $x \mapsto (yc_j)^{-1}((yc_i)x)$, si $y \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$, comme on voit aisément. De plus, on vérifie que φ_{ji} est défini pour un $b \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ si et seulement si il existe b' tel que $(c_i, b) \sim (c_j, b')$, et alors $b' = \varphi_{ji}(b)$. Soit U_{ji} le domaine de définition sur S de φ_{ji}. Il reste à démontrer que ce domaine de définition est universel, c'est-à-dire, que si $b \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$, $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$ arbitraire, et si φ_{ji} est défini en b, alors $b \in \mathrm{U}_{ji}(\mathrm{S}'')$. Il revient au même de démontrer que si b, $b' \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ sont telles que $(c_i, b) \simeq (c_j, b')$, alors $b \in \mathrm{U}_{ji}(\mathrm{S}'')$. Nous laissons la vérification de ce fait, qui est analogue à celle de (3.5), au lecteur.

Lemme 3.9. — *Supposons que* $\{c_i\}$, $i \in \mathrm{I}$, *sont des sections de* X(S) *telles que* $\coprod_i c_i \times \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *soit surjectif en tant que morphisme de faisceaux. Alors* G *est représentable et plat, de présentation finie sur* S, *et le morphisme structural* $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{G}$ *est plat et de présentation finie.*

[14] N.D.E. : Si X est lisse, séparé sur S, fidèlement plat de présentation finie sur S, alors G/S est représentable par un S–schéma en groupes lisse et de type fini sur S. C'est le théorème 6.6.1 du livre "Néron models" de Bosch-Lütkebohmert-Raynaud, Springer (1990).

Démonstration. Le fait que G soit représentable est conséquence immédiate de (3.8), et il s'ensuit que $\coprod_i c_i \times \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ est un recouvrement ouvert. Pour démontrer que $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{G}$ est plat, il suffit de le faire localement, donc de démontrer que l'application rationnelle $\mathrm{X}^2 \to c_i \times \mathrm{X}$ induit un morphisme plat sur son domaine de définition. Or cette application rationnelle est donnée par $(a, b) \mapsto (c_i, ((xc_i)^{-1}(xa))b)$, x une **650**
section arbitraire, et si c'est défini en $(a, b) \in \mathrm{X}^2(\mathrm{S}')$, on peut trouver un $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ fppf-couvrant et une section $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ tels que $((xc_i)^{-1}(xa))b$ soit défini. On voit facilement que c'est donc un morphisme plat. Il s'ensuit de même que c'est localement de présentation finie, donc fppf-couvrant. Or par construction, la relation R est effective. Donc d'après (3.5) le morphisme $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{G}$ devient de présentation finie après le changement de base $\mathrm{G} \leftarrow \mathrm{X}^2$, qui est fppf-couvrant, donc $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{G}$ est de présentation finie. Montrons que $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est plat et de présentation finie. Il est plat et localement de présentation finie puisque G est recouvert par les $c_i \times \mathrm{X} \simeq \mathrm{X}$. Or X^2/S est quasi-compact, et $\mathrm{X}^2 \to \mathrm{G}$ est surjectif. Cela démontre que G/S est quasi-compact. Pour démontrer que $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ et quasi-séparé, notons qu'on a le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathrm{X}^2 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}^2 \arrow[d, "\beta"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "\Delta"] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}. \end{tikzcd}$$

On a γ surjectif et α, β quasi-compacts, donc $\beta\alpha$ est quasi-compact, donc Δ est quasi-compact. [15]

Lemme 3.10. — *Soient $\{c_i\}$, $i \in \mathrm{I}$ des sections de $\mathrm{X}(\mathrm{S})$. Pour que $\coprod_i c_i \times \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ soit surjectif en tant que morphisme de* fppf-*faisceaux, il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

Pour chaque $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $(a, b) \in \mathrm{X}^2(\mathrm{S}')$, il existe un recouvrement ouvert $\{\mathrm{S}'_\nu\}$, $\nu \in \mathrm{N}$, de S' et une fonction $\mathrm{N} \to \mathrm{I}$ ($\nu \mapsto i(\nu)$) tel que $(c^{-1}_{i(\nu)}a)b$ soit définie sur S'_ν.

Démonstration. Soit $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$ arbitraire, et $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$. Choisissons un $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ fppf-couvrant et une section $(a, b) \in \mathrm{X}^2(\mathrm{S}')$ qui représente g. Prenons le recouvrement ouvert $\{\mathrm{S}'_\nu\}$ de S' qui existe par l'hypothèse du lemme. Alors sur chaque S'_ν on a $(a, b) \sim (c_{i(\nu)}, (c^{-1}_{i(\nu)}a)b)$ donc g est représenté par une section de $[c_{i(\nu)} \times \mathrm{X}](\mathrm{S}')$ sur S'_ν, ce qui démontre la surjectivité, parce que la famille de morphisme $\{\mathrm{S}'_\nu \to \mathrm{S}''\}$ est fppf-couvrante.

Lemme 3.11. — *Soit Y/S un préschéma de présentation finie, et soient $\{a_i\}$, $i \in \mathrm{I}$,* **651**
des sections de $\mathrm{Y}(\mathrm{S})$. Soient s_0, s_1 des points de S tels que s_0 soit spécialisation de s_1, et Y_j la fibre de Y/S au point s_j. Soit C_j l'adhérence dans Y_j de l'ensemble des points $\{a_i(s) \cap \mathrm{Y}_j\}$. Alors on a $\dim \mathrm{C}_1 \geqslant \dim \mathrm{C}_0$.

Démonstration. Il suffit de faire la vérification après un changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ avec des points choisis s'_0 et s'_1 tels que $s'_j \mapsto s_j$ et s'_0 est spécialisation de s'_1. On est

[15] N.D.E. : Une autre façon de conclure ici est par descente fidèlement plate (EGA IV_2, 2.7.1), vu que β est couvrant pour fppf.

donc (EGA II 7.1.4) réduit au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation A, s_0 le point fermé de S, et s_1 le point générique de S. Or soit V l'adhérence de C_1 dans Y. Il est clair que $C_0 \subseteq V$, et ainsi le lemme est conséquence du fait « bien connu » qu'un sous-préschéma fermé irréductible V d'un préschéma Y/S de présentation finie vérifie $\dim V \times s_1 \geqslant \dim V \times s_0$ si S est le spectre d'un anneau de valuation et si $V \times s_1 \neq \varnothing$ (EGA IV 13.1.6).

Lemme 3.12. — *Supposons que* S *est le spectre d'un anneau local, de point fermé* s_0*, et soient* $\{c_i\}$*,* $i \in I$*, des sections telles que l'adhérence* C_0 *de l'ensemble* $\{c_i(s) \cap X_0\}$ *dans la fibre fermée* X_0 *soit de dimension égale à* $\dim X_0 = n$*. Alors la condition du lemme* 3.9 *est satisfaite.*

Démonstration. Notons d'abord que les fibres de X/S ont toutes la même dimension u, ce qui résulte de EGA IV 12.1.1 (i) et du fait que X a une loi de composition rationnelle. Le lemme (3.11) implique donc que pour chaque morphisme $S_1 \to S$ avec S_1 spectre d'un corps, la dimension de l'adhérence de l'ensemble $\{c_i \times_S S_1\}$ dans X_{S_1} est égale à n. Vérifions la condition de (3.10) : Soit $(a, b) \in X^2(S')$. Pour que $(c_i^{-1}a)b$ soit défini, il faut et suffit que c_i soit contenu dans un certain ouvert $U \subseteq X_{S'}$ qui est sch. dense, relativement à S' (règle 1). On doit démontrer que c'est vrai pour i convenable, localement sur S'. Il suffit donc de traiter le cas où S' est le spectre d'un anneau local, et alors le fait que $c_i \in U(S')$ se vérifie sur la fibre fermée. On est donc réduit au cas $S' = \operatorname{Spec} k$, k un corps. Or avec les notations ci-dessus, prenons $S' = S_1$.
652 On a $\dim C_1 = \dim X_{S_1}$, et U est relativement sch. dense dans X_{S_1}. Donc $U \cap C_1 \neq \varnothing$, d'où $U \cap \{c_p \times_S S_1\} \neq \varnothing$ et on a gagné.

La démonstration du théorème est maintenant facile. Notons d'abord la conséquence suivante de la finitude du lemme (3.9) : Si $\{A_i\}$ est un système inductif d'anneaux au-dessus de S, si $\underrightarrow{A} = \lim A_i$, et si les hypothèses de (3.9) sont satisfaites pour $S = \operatorname{Spec} \underrightarrow{A}$, alors on pourra descendre l'objet qui représente le quotient G de $R \rightrightarrows X^2$ à un des $S_i = \operatorname{Spec} A_i$ avec les propriétés de finitude et de platitude énoncées dans (3.9). C'est le passage à la limite habituelle (EGA IV 8 et 11). Il s'ensuit que pour la démonstration de (iii) et (iv) de (3.7), on peut se borner au cas $S = \operatorname{Spec} A$, avec A un anneau strictement local. Soit alors x_0 un point fermé de la fibre fermée X_0 de X/S. Il existe [(*)] une extension A′ de A, locale, libre et finie, et une section de $X' = X \times_S S'$ passant par le point unique x'_0 de X′ au-dessus de x_0. Notons que $X'_0 \to X_0$ est radiciel puisque S est strictement local, donc le corps résiduel de A séparablement clos. Il s'ensuit qu'il existe un système inductif $\{A_i\}$ *d′* anneaux locaux, plats et finis au-dessus de S tel que, en posant $\underrightarrow{A} = \varinjlim A_i$ et $\underleftarrow{X} = X \times_S \operatorname{Spec} \underrightarrow{A}$, $\underleftarrow{X}$ ait un ensemble de sections qui induise un ensemble dense sur la fibre fermée $\underleftarrow{X_0}$. On prend pour chaque point fermé x_0 de X_0 une extension $A(x_0)$ telle que l'extension de base de X correspondante admette une section « passant par x_0 », et on prend comme système inductif le système des produits tensoriels finis des $A(x_0)$. Notons que $\underrightarrow{A}$ est locale, étant limite d'anneaux locaux. Donc d'après (3.12) et (3.10) on a le quotient G

[(*)] cf. note au bas de la page 15, Exp. VII.

au-dessus de Spec $\underrightarrow{\mathrm{A}}$, donc au-dessus d'un des Spec A_i d'après les remarques ci-dessus, donc localement pour la topologie fppf.

En fait il résulte des constructions que localement pour la topologie fppf on peut trouver un ensemble *fini* des sections $\{c_i\}$ $(i = l, \ldots, r)$ tel que G soit recouvert par les $c_i \times \mathrm{X}$. (ii) et (iv) suivent facilement de ce fait, et nous laissons la vérification de (i) au lecteur.

Corollaire 3.13. — *Le faisceau en groupes* G *déterminé par un germe de groupe* (X, W) *au-dessus de* S *est représentable dans chacune des situations suivantes :* 653

(i) S *est artinien.*

(ii) *Pour chaque schéma local* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *d'un point fermé s de* S, $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}$ *a un ensemble de sections qui induit sur la fibre fermée un ensemble dont l'adhérence est de dimension* $\dim \mathrm{X}_s$.

(iii) S *est strictement local, et* X/S *est lisse.*

(iv) *Il existe* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fppf-*couvrante tel que* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *soit représentable et affine au-dessus de* S.

En effet, (ii) est conséquence de (3.10) et (3.12), (iii) résulte directement de (ii) et du « lemme de Hensel », (iv) de la descente des schémas affines, et (i) de la descente des schémas en groupes, qui est possible ici parce qu'on sait que tout sous-ensemble fini d'un groupe sur un corps est contenu dans un ouvert affine (Exp VI).

Bibliographie

[1] Weil, A., Variétés abéliennes et courbes algébriques. Hermann, Paris, 1948.

[2] Yanagihara, H. Reduction of group varieties and transformation spaces. Journ. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, vol. 27, No.1, June, 1963.