EXPOSÉ X

CARACTÉRISATION ET CLASSIFICATION DES GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF

par A. Grothendieck

1. Classification des groupes isotriviaux. Cas d'un corps de base

Rappelons (IX 1.1) que le groupe de type multiplicatif H sur le préschéma S est dit *isotrivial* s'il existe un morphisme *étale fini surjectif* $S' \to S$ tel que $H' = H \times_S S'$ soit diagonalisable. Lorsque S est connexe, alors S' se décompose en somme finie de composantes connexes S'_i, et on peut donc (quitte à remplacer S' par un des S'_i) supposer S' connexe. Enfin, on sait qu'on peut majorer S' par un S'_1 fini étale connexe, qui soit *galoisien*, i.e. un fibré principal homogène sur S de groupe Γ_S, où Γ est un groupe fini ordinaire (cf. SGA 1, V N^{os} 7 & 3 lorsque S est localement noethérien, et EGA IV$_4$, 18.2.9 dans le cas général). (1) Nous supposons S' choisi ainsi, et nous proposons de déterminer les groupes de type multiplicatif H sur S qui sont « trivialisés » par S', i.e. tels que $H' = H \times_S S'$ soit diagonalisable. (2) D'après la théorie de la descente (cf. SGA 1, VIII 5.4), la catégorie de ces H est équivalente à la catégorie des groupes diagonalisables H' sur S', munis d'opérations de Γ sur H' compatibles avec les opérations de Γ sur S'. (N. B. Comme les groupes envisagés sont *affines* au-dessus de la base, la question d'effectivité d'une donnée de descente se résoud par l'affirmative, cf. SGA 1, VIII 2.1). Or S' étant *connexe*, le foncteur contravariant 77

$$M \longmapsto D_{S'}(M)$$

est une *anti-équivalence* de la catégorie des groupes commutatifs ordinaires avec la catégorie des groupes diagonalisables sur S' (cf. VIII 1.6), dont un foncteur quasi-inverse est $H \mapsto \mathrm{Hom}_{S'\text{-gr.}}(H, \mathbb{G}_{m,S'})$. (3) 78

(0)version xy du 6 novembre 2009 : Addenda mis en Sect. 9, revu jusque 8.8

(1)N.D.E. : Plus précisément, ceci découle des « conditions axiomatiques d'une théorie de Galois », cf. SGA 1, V N°4 g) ; lorsque S est localement noethérien, la vérification des axiomes est faite dans *loc. cit.*, N^{os} 7 & 3, en particulier 3.7, qui repose sur SGA 1, I 10.9. Ce dernier résultat est démontré, sans hypothèses noethériennes, dans EGA IV$_4$, 18.2.9.

(2)N.D.E. : Dans la suite, on dira qu'un S-groupe de type multiplicatif est « *déployé* » s'il est « trivial » au sens de IX 1.2, c.-à-d., si c'est un S-groupe diagonalisable.

(3)N.D.E. : On a corrigé S en S'.

Proposition 1.1. — *Soient* S *un préschéma* connexe*,* S' *un revêtement principal connexe de* S *de groupe* Γ (fini)*. Alors la catégorie des groupes de type multiplicatif sur* S *déployés* [(4)] *par* S'*, est anti-équivalente à la catégorie des* Γ*-modules, i.e. des groupes commutatifs ordinaires* M *munis d'un homomorphisme* $\Gamma \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{M})$*.*

On en conclut de manière standard :

Corollaire 1.2. — *Soient* S *un préschéma* connexe*,* $\xi : \mathrm{Spec}(\Omega) \to \mathrm{S}$ *un « point géométrique » de* S*, i.e. un homomorphisme dans* S *du spectre d'un corps algébriquement clos* Ω*, considérons le groupe fondamental de* S *en* ξ (cf. SGA 1 V, N°7) *:*

$$\pi = \pi_1(\mathrm{S}, \xi).$$

Alors la catégorie des groupes de type multiplicatif isotriviaux H *sur* S *est anti-équivalente à la catégorie des « modules galoisiens » sous* π*, i.e. des* π*-modules* M *tels que le stabilisateur dans* π *de tout point de* M *est un sous-groupe ouvert.*

Dans cette correspondance, au groupe de type multiplicatif isotrivial H est associé le groupe $\mathrm{M} = \mathrm{Hom}_{\Omega\text{-gr.}}(\mathrm{H}_\xi, \mathbb{G}_{m,\Omega})$, où H_ξ est la fibre de H en ξ ; ce groupe se trouve muni de façon naturelle d'opérations de $\pi_1(\mathrm{S}, \xi)$.

Remarque 1.3. — Nous verrons plus bas (cf. 5.16) que si S est normal, ou plus généralement géométriquement unibranche, alors tout groupe de type multiplicatif et de type fini sur S est nécessairement isotrivial, donc le principe de classification 1.2 est applicable aux groupes de type multiplicatif et de type fini sur S, qui correspondent
79 aux π-modules galoisiens qui sont de type fini sur $\mathbb{Z}$. Pour l'instant, bornons-nous au résultat suivant :

Proposition 1.4. — *Soient* k *un corps,* H *un groupe de type multiplicatif et* de type fini *sur* k*, alors* H *est isotrivial, i.e. il existe une extension finie* séparable k' *de* k *qui déploie* H*.*

Par suite, en vertu de 1.2*, si* π *est le groupe de Galois topologique d'une clôture algébrique* Ω *de* k*, la catégorie des groupes de type multiplicatif et de type fini* H *sur* k *est anti-équivalente à la catégorie des modules galoisiens* M *sous* π *qui sont de type fini comme* $\mathbb{Z}$*-modules.*

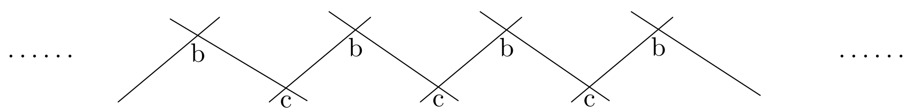
Il résulte d'abord du fait que H est de type fini sur k et du « principe de l'extension finie » (cf. EGA IV_3, 9.1.4) qu'il existe une extension finie k' de k qui déploie H. Rappelons le principe de démonstration : par hypothèse il existe un groupe diagonalisable de type fini G sur k, un S' fidèlement plat sur $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$, et un isomorphisme de S'-groupes $\mathrm{H}_{S'} \simeq \mathrm{G}_{S'}$. Quitte à remplacer S' par le corps résiduel d'un point de S', on peut supposer que S' est le spectre d'une extension K de k. Cette dernière est limite inductive de ses sous-algèbres A_i de type fini, d'où résulte facilement (cf. EGA IV_3, 8.8.2.4) que u provient d'un A_i-isomorphisme $u_i : \mathrm{H}_{\mathrm{A}_i} \simeq \mathrm{G}_{\mathrm{A}_i}$ pour i assez grand. En vertu du Nullstellensatz, il existe un anneau quotient k' de A_i qui est une extension finie de k. Celle-ci déploie donc H.

[(4)] N.D.E. : On a remplacé, ici et dans la suite, « splittés » par « *déployés* », « splitte » par « *déploie* », etc.

Alors k' est une extension radicielle d'une extension séparable k'_s de k. En vertu de IX 5.4 l'isomorphisme $u' : \mathrm{H}_{k'} \simeq \mathrm{G}_{k'}$ provient d'un isomorphisme $\mathrm{H}_{k'_s} \simeq \mathrm{G}_{k'_s}$, ce qui prouve que k'_s déploie H et établit 1.4.

Remarque 1.5. — L'énoncé 1.2 fournit en particulier une caractérisation des tores isotriviaux sur S de dimension relative n : posant $\pi = \pi_1(\mathrm{S}, \xi)$, ils correspondent aux classes (à « équivalence » près) de représentations $\pi \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ à noyau un sous-groupe ouvert de π.

1.6. Même lorsque S est une courbe algébrique, il peut exister sur S des tores (de dimension relative 2) qui sont non localement isotriviaux (et a fortiori non isotriviaux) ; **80**
il peut exister également des tores localement triviaux non isotriviaux. (Noter cependant que de tels phénomènes ne peuvent se présenter que si S n'est pas normale, comme on a déjà signalé dans 1.3). Soit par exemple S une courbe algébrique irréductible (sur un corps algébriquement clos pour fixer les idées) ayant un point double ordinaire a, soient S$'$ la normalisée, et b et c les deux points de S$'$ au-dessus de a. On construit alors un fibré principal homogène P sur S, de groupe structural $\mathbb{Z}$, connexe, en rattachant entre eux une infinité d'exemplaires de S$'$ suivant le diagramme



(N. B. Il s'agit d'un fibré principal au sens de la topologie étale). Or on a un homomorphisme

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}), \qquad \varphi(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui permet de construire un tore T sur S, de dimension relative 2, à partir du tore trivial $\mathbb{G}_m^2$ sur P et de la donnée de descente sur ce dernier déduite de φ. (N. B. on notera que la projection $\mathrm{P} \to \mathrm{S}$ est couvrante pour la topologie étale et a fortiori pour la topologie canonique de (**Sch**), et que la donnée de descente envisagée est nécessairement effective, puisque $\mathbb{G}_{m,\mathrm{P}}^2$ est *affine* sur P). Il n'est pas difficile de prouver que T n'est pas isotrivial au voisinage de a [5] (il est cependant trivial dans $\mathrm{S} - \{a\}$).

On trouve une variante de cette construction en prenant pour S une courbe ayant deux composantes irréductibles S_1 et S_2 se coupant en deux points a' et a'', ce qui permet de construire un fibré principal homogène P sur S de groupe $\mathbb{Z}_\mathrm{S}$, connexe, et localement trivial, d'où un tore associé T qui est localement trivial, mais non isotrivial.

2. Variations de structure infinitésimales **81**

[6] Commençons par rappeler le résultat suivant (cf. SGA 1, I 8.3 dans le cas S localement noethérien, EGA IV$_4$, 18.1.2 en général)

[5] N.D.E. : Voir 7.3 plus bas.
[6] N.D.E. : On a ajouté ce « rappel », pour des références ultérieures.

Rappel 2.0. — Soit S un préschéma, S_0 un sous-préschéma ayant même ensemble sous-jacent. Alors le foncteur
$$\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{X}_0 = \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_0$$
est une *équivalence* entre la catégorie des préschémas étales sur S et la catégorie analogue sur S_0.

Proposition 2.1. — *Soient* S *un préschéma,* S_0 *un sous-préschéma ayant même ensemble sous-jacent* (*i.e. défini par un nilidéal* $\mathscr{I}$). *Alors le foncteur*
$$\mathrm{H} \longmapsto \mathrm{H}_0 = \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_0$$
de la catégorie des préschémas en groupes de type multiplicatif sur S *vers la catégorie analogue sur* S_0*, est* pleinement fidèle.

De plus, il induit une équivalence *entre la catégorie de groupes de type multiplicatif* quasi-isotriviaux *sur* S *et la catégorie analogue sur* S_0*.*

Prouvons d'abord la pleine fidélité, i.e. que si H, G sur S sont de type multiplicatif, alors
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{H}_0, \mathrm{G}_0)$$
est bijectif. La question étant locale sur S, on peut supposer S affine, il existe alors un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $S' \to S$ qui déploie H et G. Soient $S'' = S' \times_S S'$, désignons par H', G' resp. H'', G'' les groupes déduits de H, G par le changement de base $S' \to S$ resp. $S'' \to S$, définissons de même S'_0 et S''_0, ce dernier étant aussi isomorphe à $S'_0 \times_{S_0} S'_0$. On trouve alors un diagramme commutatif à lignes exactes :
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G}) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-gr.}}(\mathrm{H}', \mathrm{G}') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "u'"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}''\text{-gr.}}(\mathrm{H}'', \mathrm{G}'') \arrow[d, "u''"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{H}_0, \mathrm{G}_0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'_0\text{-gr.}}(\mathrm{H}'_0, \mathrm{G}'_0) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}''_0\text{-gr.}}(\mathrm{H}''_0, \mathrm{G}''_0),
\end{tikzcd}$$
donc pour prouver que u est bijective, il suffit de prouver qu'il en est ainsi de u' et u'', ce qui nous ramène au cas où H et G sont *diagonalisables*, donc de la forme $D_S(M)$ et
82 $D_S(N)$, où M et N sont des groupes commutatifs ordinaires. On aura donc de même $H_0 = D_{S_0}(M)$, $G_0 = D_{S_0}(N)$. On a alors un diagramme commutatif [7]
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{N}_{\mathrm{S}}, \mathrm{M}_{\mathrm{S}}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}), \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{N})) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{N}_{\mathrm{S}_0}, \mathrm{M}_{\mathrm{S}_0}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{D}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{M}), \mathrm{D}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{N})),
\end{tikzcd}$$

[7] N.D.E. : On a corrigé l'original, en échangeant M et N dans les termes de droite.

où les flèches horizontales sont des isomorphismes en vertu de VIII 1.4, donc on est ramené à prouver que l'homomorphisme

$$\text{(x)} \qquad \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{N_S}, \mathrm{M_S}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S_0}\text{-gr.}}(\mathrm{N_{S_0}}, \mathrm{M_{S_0}})$$

est bijectif, i.e. à prouver que le foncteur $\mathrm{M_S} \mapsto \mathrm{M_{S_0}}$, des préschémas en groupes commutatifs constants sur S vers les préschémas en groupes commutatifs constants sur $\mathrm{S_0}$, est pleinement fidèle. Or (x) s'identifie aussi à l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(\mathrm{N}, \Gamma(\mathrm{M_S})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(\mathrm{N}, \Gamma(\mathrm{M_{S_0}}))$$

déduite de $\Gamma(\mathrm{M_S}) \to \Gamma(\mathrm{M_{S_0}})$, or cette dernière application est évidemment bijective (car $\Gamma(\mathrm{M_S})$ = ensemble des applications localement constantes de S dans M, ne dépend que de l'espace topologique sous-jacent à S), d'où la conclusion voulue.

Pour prouver la deuxième assertion de 2.1, il reste à voir que tout groupe de type multiplicatif $\mathrm{H_0}$ sur $\mathrm{S_0}$ qui est quasi-isotrivial provient d'un groupe de type multiplicatif H sur S quasi-isotrivial. Pour le voir, soit $\mathrm{S}'_0 \to \mathrm{S_0}$ un morphisme étale surjectif qui déploie $\mathrm{H_0}$.

On sait (cf. 2.0) qu'il existe un morphisme étale $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et un $\mathrm{S_0}$-isomorphisme $\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S_0} \simeq \mathrm{S}'_0$, donc on peut supposer que S'_0 provient de S' par réduction. Comme **83**
H'_0 est diagonalisable, on voit tout de suite qu'il est isomorphe au groupe déduit par changement de base $\mathrm{S}'_0 \to \mathrm{S}'$ d'un groupe diagonalisable H' sur S' (N. B. si $\mathrm{H}'_0 = \mathrm{D}_{\mathrm{S}'_0}(\mathrm{M})$, on prend $\mathrm{H}' = \mathrm{D}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{M})$). Posons comme d'habitude $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, $\mathrm{S}''' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, et définissons de même S''_0, S'''_0, déduits des précédents par changement de base $\mathrm{S_0} \to \mathrm{S}$ et isomorphes aussi au carré resp. cube fibré de S'_0 sur $\mathrm{S_0}$. Utilisant la pleine fidélité déjà démontrée, dans les cas $(\mathrm{S}'', \mathrm{S}''_0)$ et $(\mathrm{S}''', \mathrm{S}'''_0)$, on voit que la *donnée de descente* naturelle sur H'_0 relativement à $\mathrm{S}'_0 \to \mathrm{S_0}$ (cf. IV 2.1) provient d'une donnée de descente bien déterminée sur H' relativement à $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Cette donnée de descente est *effective* puisque H' est affine sur S' (SGA 1, VIII 2.1), il existe donc un S-groupe H tel que $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' = \mathrm{H}' = \mathrm{D}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{M})$, et H est donc de type multiplicatif quasi-isotrivial.

On vérifie alors facilement, utilisant maintenant le résultat de pleine fidélité pour $(\mathrm{S}', \mathrm{S}'_0)$, que l'isomorphisme donné entre H'_0 et $\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{S}'_0$ provient d'un isomorphisme entre $\mathrm{H_0}$ et $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S_0}$. (Pour un exposé plus en forme de résultats de ce type, voir l'article de Giraud en préparation [(*)] sur la théorie de la descente).

Corollaire 2.2. — *Soient* H *un* S*-groupe de type multiplicatif, et* $\mathrm{H_0} = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S_0}$*. Pour que* H *soit quasi-isotrivial* (*resp. localement isotrivial, resp. isotrivial, resp. localement trivial, resp. trivial*)*, il faut et il suffit que* $\mathrm{H_0}$ *le soit.*

Le « il faut » est trivial, le « il suffit » a déjà été vu dans le cas quasi-isotrivial, car grâce à la pleine fidélité, il suffit de savoir que tout groupe quasi-isotrivial sur $\mathrm{S_0}$ se remonte en un groupe quasi-isotrivial sur S. Le même argument marche pour « trivial ». Pour le cas « isotrivial », on reprend le raisonnement établissant la deuxième assertion de 2.1, mais en prenant $\mathrm{S}'_0 \to \mathrm{S_0}$ étale surjectif et *fini*. Les cas « localement isotrivial » et « localement trivial » résultent aussitôt des cas « isotrivial » et « trivial ».

On peut généraliser un peu 2.2 lorsque $\mathscr{I}$ est nilpotent, en ne supposant pas a **84**

[(*)] cf. J. Giraud, Méthode de la descente, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 2, (1964).

priori H de type multiplicatif : [8]

Corollaire 2.3. — *Supposons l'idéal* $\mathscr{I}$ *définissant* S_0 localement nilpotent*. Soit* H *un préschéma en groupes sur* S*,* plat *sur* S*, et* $H_0 = H \times_S S_0$*. Pour que* H *soit* de type multiplicatif quasi-isotrivial*, il faut et il suffit que* H_0 *le soit.*

En effet, supposons que H_0 soit de type multiplicatif quasi-isotrivial, prouvons que H l'est. La question étant locale pour la topologie étale, et la catégorie des préschémas étales sur S étant équivalente à la catégorie des préschémas étales sur S_0 par lefoncteur $S' \mapsto S' \times_S S_0$ (cf. 2.0), on est ramené aussitôt au cas où H_0 est diagonalisable, donc isomorphe à un groupe $D_{S_0}(M)$. Soit $G = D_S(M)$, on a donc un isomorphisme u_0 : $H_0 \xrightarrow{\sim} G_0$, je dis qu'il provient d'un unique homomorphisme $u : H \to G$, qui sera donc un isomorphisme puisque u_0 l'est (H et G étant plats sur S, et $\mathscr{I}$ localement nilpotent [9]), ce qui établira 2.3. Or on a (cf. VIII 1 (xxx))

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(H, G) \simeq \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(M_S, \underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(H, \mathbb{G}_{m,S})),$$

et le deuxième membre s'identifie aussi à

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(M, \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(H, \mathbb{G}_{m,S})),$$

donc l'homomorphisme

$$\text{(x)} \qquad \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(H, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_0\text{-gr.}}(H_0, G_0)$$

est isomorphe à l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(M, \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(H, \mathbb{G}_{m,S})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(M, \mathrm{Hom}_{S_0\text{-gr.}}(H_0, \mathbb{G}_{m,S_0}))$$

déduit de l'homomorphisme de restriction

$$\text{(xx)} \qquad \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(H, \mathbb{G}_{m,S}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_0\text{-gr.}}(H_0, \mathbb{G}_{m,S_0}),$$

85 donc pour prouver que (x) est bijectif, il suffit de prouver que (xx) l'est. La question est locale sur S, on peut donc supposer S affine. Or $\mathbb{G}_{m,S}$ étant commutatif et *lisse* sur S, la situation est justiciable de IX 3.6, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.4. — *Soient* A *un anneau* local artinien *de corps résiduel* k*,* $S = \mathrm{Spec}(A)$*,* $S_0 = \mathrm{Spec}(k)$.

(i) [10] *Soit* H *un* S*-préschéma en groupes* plat et localement de type fini*, tel que* $H_0 = H \times_S S_0$ *soit* de type multiplicatif*. Alors* H *est* de type multiplicatif, de type fini et isotrivial*. En particulier, tout* S*-préschéma en groupes* H de type multiplicatif et de type fini *est* isotrivial.

(ii) *Le foncteur* $H \mapsto H_0$ *est une* équivalence *entre la catégorie des groupes de type multiplicatif* de type fini *sur* A *et la catégorie analogue sur* k*.*

---

[8] N.D.E. : On rappelle que 2.3 est utilisé pour démontrer le théorème IX 3.6 bis.

[9] N.D.E. : Comme u_0 est un isomorphisme, il suffit de voir que pour tout $h \in H$, le morphisme $\phi : \mathscr{O}_{G,u(h)} \to \mathscr{O}_{H,h}$ est bijectif. Il l'est par réduction modulo $I = \mathscr{I}_s$ (où s est l'image de h dans S), donc son conoyau C vérifie $C = IC$, d'où $C = 0$ puisque I est nilpotent. Alors, comme $\mathscr{O}_{H,h}$ est *plat* sur $\mathscr{O}_{S,s}$, le noyau K de ϕ vérifie aussi $K = IK$, d'où $K = 0$.

[10] N.D.E. : On a récrit l'énoncé en ne conservant que l'implication non triviale, pour la mettre en évidence.

En effet, soit H comme dans (i). Alors H_0 est de type multiplicatif et localement de type fini, donc de type fini, donc isotrivial d'après 1.4. Donc, d'après 2.3 et 2.2, H est de type multiplicatif (donc de type fini) et isotrivial. L'assertion (ii) découle alors de 2.1.

Corollaire 2.5. — *Soit* $S' \to S$ *un morphisme* fidèlement plat et radiciel.

(i) *Le foncteur* $H \mapsto H' = H \times_S S'$*, de la catégorie des groupes de type multiplicatif sur* S *vers la catégorie analogue sur* S'*, est* pleinement fidèle.

De plus, il induit une équivalence *entre les sous-catégories formées des groupes de type multiplicatif* quasi-isotriviaux.

(ii) *Si* H *est de type multiplicatif, pour qu'il soit quasi-isotrivial,* (*resp. localement isotrivial, resp. isotrivial, resp. localement trivial, resp. trivial*) *il faut et il suffit que* H' *le soit.*

Soient en effet $S'' = S' \times_S S'$ et $S''' = S' \times_S S' \times_S S'$, alors l'hypothèse que $S' \to S$ est radiciel implique que les immersions diagonales $S' \to S''$ et $S' \to S'''$ sont surjectives, donc le changement de base par l'une ou l'autre de ces immersions est justiciable de 2.1 et 2.2. Compte tenu que $S' \to S$ est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée des groupes de type multiplicatif sur des préschémas (car il est fidèlement plat et quasi-compact [(11)]), notre assertion résulte formellement de 2.1 et 2.2 (cf. pour un raisonnement en forme l'article de Giraud déjà cité).

3. Variations de structure finies : anneau de base complet

86

Lemme 3.1. — *Soient* A *un anneau* noethérien*, muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I*-adique,* $S = \mathrm{Spec}(A)$*,* $S_0 = \mathrm{Spec}(A/I)$*,* G *et* H *deux* S*-schémas en groupes, avec* G *de type multiplicatif et* isotrivial*,* H affine *sur* S*,* plat sur S en les points de $H_0 = H \times_S S_0$*,* H_0 *de type multiplicatif* quasi-isotrivial*. Alors l'application naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(G, H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S_0\text{-gr.}}(G_0, H_0)$$

est bijective.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $S_n = \mathrm{Spec}(A/I^{n+1})$, et soient G_n, H_n les groupes déduits de G, H par le changement de base $S_n \to S$. Comme G/S est de type multiplicatif *isotrivial* et H *affine sur* S, alors, d'après IX 7.1, l'homomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(G, H) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{S_n\text{-gr.}}(G_n, H_n)$$

est bijectif. D'autre part, en vertu de 2.3, les H_n sont de type multiplicatif quasi-isotriviaux, et en vertu de 2.1 les homomorphismes de transition dans le système projectif $(\mathrm{Hom}_{S_n\text{-gr.}}(G_n, H_n))_n$ sont des isomorphismes, d'où aussitôt 3.1.

Théorème 3.2. — *Soient* A *un anneau* noethérien *muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I*-adique,* $S = \mathrm{Spec}(A)$*,* $S_0 = \mathrm{Spec}(A/I)$*. Alors :*

[(11)] N.D.E. : Préciser ce point ...

(i) *Le foncteur*

$$\mathrm{H} \longmapsto \mathrm{H}_0 = \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_0$$

est une équivalence *entre la catégorie des groupes de type multiplicatif* isotriviaux *sur* S *et la catégorie analogue sur* S_0.

87 (ii) *Soit* H *un* S-*groupe de type multiplicatif et* de type fini *; pour que* H *soit* isotrivial*, il faut et il suffit que* H_0 *le soit.*

Démonstration. Pour (i) on peut, soit reprendre la démonstration de 2.1, soit utiliser 1.2, en utilisant dans l'un et l'autre cas que le foncteur

$$\mathrm{S}' \longmapsto \mathrm{S}'_0 = \mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_0$$

de la catégorie des schémas finis et étales sur S dans la catégorie des schémas finis et étales sur S_0 est une équivalence (SGA 1, I 8.4), ce qu'on peut aussi énoncer (se ramenant au cas S connexe, i.e. S_0 connexe), choisissant un point géométrique ξ de S_0, en disant que l'homomorphisme canonique

$$\pi_1(\mathrm{S}_0, \xi) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{S}, \xi)$$

est un isomorphisme.

Prouvons (ii), i.e. que si H_0 est isotrivial, alors H l'est. En vertu de (i), il existe un groupe de type multiplicatif isotrivial G sur S et un S_0-isomorphisme

$$u_0 : \mathrm{G}_0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0.$$

(12) Comme H est de type fini, il en est de même de H_0 et G_0 ; donc, d'après IX 2.1 b), le type de G en chaque point de S est un groupe abélien de type fini, et donc G est de type fini sur S. D'autre part, en vertu de 3.1, u_0 provient d'un homomorphisme de S-groupes

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}.$$

Enfin, comme G, H sont de type multiplicatif et *de type fini* sur S, et comme u_0 est un isomorphisme, alors, d'après IX 2.9, u est un isomorphisme (compte tenu que tout voisinage de S_0 dans S est égal à S).

88 ***Corollaire 3.3***. — *Soit* A *un anneau* local noethérien complet *de corps résiduel* k.

(i) *Tout groupe de type multiplicatif et* de type fini *sur* A *est* isotrivial.

(ii) *Le foncteur* $\mathrm{H} \longmapsto \mathrm{H} \otimes_{\mathrm{A}} k = \mathrm{H}_0$ *est une* équivalence *entre les catégorie de groupes de type multiplicatif et* de type fini *sur* A *et sur* k.

(12) D'abord, (i) résulte de 3.2 (ii) et 1.4 ; alors (ii) résulte de 3.2 (i), compte-tenu du fait que H est de type fini si et seulement si H_0 l'est (cf. la preuve de 3.2 (ii)).

Remarque 3.3.1. — On notera que 3.3 donne, en vertu de 1.4, une classification complète des groupes de type multiplicatif et *de type fini* sur A en termes du groupe de Galois topologique d'une clôture algébrique Ω de k.

(12) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Remarques 3.4. — Sous les hypothèses de 3.2 (i.e. A noethérien, séparé et complet pour la topologie I-adique, mais sans autre hypothèse sur A/I), il résultera du N°5 que le foncteur $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{H}_0$, de la catégorie des groupes de type multiplicatif et *de type fini* sur S vers la catégorie analogue sur S_0, est encore *pleinement fidèle* (sans hypothèses d'isotrivialité). [13]

Cependant, il n'est pas en général essentiellement surjectif, en fait il peut exister un S_0-groupe H_0, de type multiplicatif et de type fini, localement trivial si on y tient (mais non isotrivial), qui ne provienne pas par réduction d'un groupe de type multiplicatif H sur S.

Pour le voir reprenons l'un ou l'autre des exemples 1.6 d'un groupe de type multiplicatif non isotrivial sur une courbe non normale. On peut évidemment prendre cette courbe affine, soit S_0, et supposer qu'elle soit plongée dans l'espace affine de dimension 2, donc définie par un idéal J dans $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$. Nous prendrons pour A le complété de cet anneau pour la topologie J-préadique, de sorte que A est un anneau régulier de dimension 2, a fortiori *normal*. Nous verrons en 5.16 qu'il en résulte que tout groupe de type multiplicatif et *de type fini* sur $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est *isotrivial* ; donc H_0, qui est de type fini et non isotrivial, ne provient pas d'un groupe de type multiplicatif H sur S (car H serait nécessairement de type fini, donc isotrivial).

Lemme 3.5. — [(*)] *Soient* S *un préschéma,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un homomorphisme de* S-*préschémas en groupes* localement de présentation finie et plats *sur* S*,* U *l'ensemble des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que l'homomorphisme induit sur les fibres* $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *soit plat* (*resp. lisse, resp. non ramifié, resp. étale, resp. quasi-fini*). 89

Alors U *est ouvert, et la restriction* $u|_{\mathrm{U}} : \mathrm{G}|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ *est un morphisme plat* (*resp. lisse, resp. non ramifié. resp. étale, resp. quasi-fini*).

Soit en effet V l'ensemble des points en lesquels u est plat (resp. ...). On sait que V est ouvert (cf. SGA 1, I à IV dans le cas localement noethérien, EGA IV en général [14]), et que pour $x \in \mathrm{G}$ au-dessus de $s \in \mathrm{S}$, on a $x \in \mathrm{V}$ si et seulement si $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ est plat (resp. ...) en x (même référence ; dans les cas plat, lisse, étale, on utilise ici la platitude de G et H sur S). Comme u_s est un homomorphisme de groupes localement algébriques, cela signifie aussi que u_s est plat (resp. ...) partout (Exp. $\mathrm{VI_B}$, 1.3), i.e. $s \in \mathrm{U}$. Donc U est l'image inverse de l'ouvert V par la section unité de G, donc ouvert, et $\mathrm{V} = \mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$, donc $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ est plat (resp. ...) ce qui achève la démonstration. (N. B. dans le cas « non ramifié » ou « quasi-fini », l'hypothèse de platitude sur G et H est inutile).

Lemme 3.6. — *Soit* H *un groupe* algébrique commutatif *sur un corps* k*, admettant un sous-groupe* ouvert G *de type multiplicatif. Alors la famille des sous-schémas* ${}_n\mathrm{H}$

[(*)] cf. aussi $\mathrm{VI_B}$ 2.5 pour des développements plus systématiques de cette nature.

[13] N.D.E. : Préciser cette référence, éventuellement ajouter un corollaire dans le N°5 ...

[14] N.D.E. : Préciser ces références : Comme G, H sont localement de présentation finie, u est localement de présentation finie (IV_1, 1.4.3 (v)), ensuite on applique IV_3, 11.3.10 et 13.1.4 pour plat et quasi-fini, IV_4, 17.4.1, 17.5.1 et 17.6.1 pour non-ramifié, lisse et étale ; comparer avec $\mathrm{VI_B}$ 2.5.

$(n > 0)$ *de* H *est* schématiquement dense*, en particulier si on a* ${}_n\mathrm{H} = {}_n\mathrm{G}$ *pour tout* $n > 0$*, alors* $\mathrm{H} = \mathrm{G}$.

Ici ${}_n\mathrm{H}$ désigne le noyau de $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$. [15] Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k ; il suffit de montrer que la famille $({}_n\mathrm{H}_{\overline{k}})_{n>0}$ est schématiquement dense dans $\mathrm{H}_{\overline{k}}$, car alors la famille $({}_n\mathrm{H})_{n>0}$ le sera dans H (cf. IX 4.5). Donc, on peut supposer k algébriquement clos, donc G de la forme $\mathrm{D}_k(\mathrm{M})$, M un groupe commutatif de type fini ordinaire. Soit $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}/\mathrm{Torsion}(\mathrm{M})$, alors $\mathrm{T} = \mathrm{D}_k(\mathrm{M}_0)$ est le plus grand tore contenu dans G, et H/T est fini, donc $\mathrm{H}(k)/\mathrm{T}(k)$ est annulé par un entier $\nu > 0$. On peut trouver un nombre fini d'éléments $g_i \in \mathrm{H}(k)$ tels que

$$\mathrm{H} = \coprod_i g_i \cdot \mathrm{G},$$

et on aura $g_i^\nu \in \mathrm{T}(k)$. Comme k est algébriquement clos, $\nu \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{T}}$ est surjectif dans $\mathrm{T}(k) \simeq k^{*d}$, donc quitte à remplacer les g_i par $g_i t_i^{-1}$, où $t_i \in \mathrm{T}(k)$ est tel que $t_i^\nu = g_i^\nu$,
90 on peut supposer que $g_i^\nu = 1$. Si alors n est un multiple de ν, on aura

$${}_n\mathrm{H} \supseteq g_i \cdot {}_n\mathrm{G},$$

et comme (pour $n > 0$ variable) la famille des ${}_n\mathrm{G}$ est schématiquement dense dans G en vertu de IX 4.7, la conclusion 3.6 apparaît.

Théorème 3.7. — *Soient* A *un anneau* noethérien *muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I*-adique,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$*,* $\mathrm{S}_0 = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$*, et soit* H *un* S*-schéma en groupes* affine de type fini, plat sur S en les points *de* H_0*, tel que* $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$ *soit de type multiplicatif et* isotrivial*.*

Alors il existe un sous-groupe ouvert et fermé G *de* H*,* de type multiplicatif isotrivial (*et de type fini*)*, tel que* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{H}_0$*.*

En vertu de 3.2 (i), il existe un groupe de type multiplicatif isotrivial G sur S et un isomorphisme

$$u_0 : \mathrm{G}_0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0.$$

En vertu de 3.1, u_0 provient d'un unique homomorphisme de S-groupes

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}.$$

Utilisant IX 6.6, on voit que u est un monomorphisme (car si U est l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ est un monomorphisme, alors U est un voisinage ouvert de S_0 donc identique à S, et $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ est un monomorphisme). En vertu de IX 2.5, u est même une immersion fermée.

[16] Donc G est de type fini, donc de présentation finie sur S. Alors, en vertu du lemme 3.5 dans le cas « étale », on voit qu'il existe un ouvert U voisinage de S_0, donc identique à S, tel que $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ soit étale, donc u est étale, donc une immersion ouverte (comme c'est un monomorphisme étale [17]), ce qui achève la démonstration.

[15] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[16] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[17] N.D.E. : cf. EGA IV_4, 17.9.1.

Corollaire 3.8. — *Soient* A *un anneau* noethérien *muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I-*adique,* $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S_0 = \mathrm{Spec}(A/I)$, *et soit* H *un* S-*préschéma en groupes* de type fini, affine et plat sur S. **91**

Pour que H *soit* de type multiplicatif et isotrivial*, il faut et il suffit que* H_0 *le soit, et que* H *satisfasse l'une des conditions* a) *et* b) *suivantes* (qui sont donc équivalentes moyennant les conditions précédentes) *:*

a) *Les fibres de* H *sont de type multiplicatif, et de type constant sur chaque composante connexe de* S.

b) H *est commutatif et les* ${}_n\mathrm{H}$ $(n > 0)$ *sont* finis *sur* S.

Ces dernières conditions sont aussi impliquées par la suivante :

c) *Les fibres de* H *sont* connexes.

Bien entendu, si H est de type multiplicatif (et isotrivial), les conditions a) et b) sont vérifiées, d'après IX 1.4.1 a) et 2.1 c), donc seul le « il suffit » demande une démonstration. Nous allons utiliser le sous-groupe G indiqué dans 3.7. Lorsque la condition c) est satisfaite, on a évidemment G = H et on a fini.

Dans le cas b), on note que l'immersion $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ induit une immersion ouverte

$${}_nu : \quad {}_n\mathrm{G} \longrightarrow {}_n\mathrm{H}$$

qui induit un isomorphisme $({}_n\mathrm{G})_0 \xrightarrow{\sim} ({}_n\mathrm{H})_0$; comme ${}_n\mathrm{H}$ est fini sur S, cela implique aussitôt que ${}_nu$ est un isomorphisme (le complémentaire de son image est fini sur S et se réduit suivant $\varnothing$). En vertu de 3.6 il s'ensuit que les morphismes induits sur les fibres $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ sont des isomorphismes, donc u est surjectif, donc un isomorphisme.

Enfin, dans le cas a), on peut supposer S connexe, [18] et il s'ensuit que pour tout $s \in \mathrm{S}$, $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ est un monomorphisme de groupes algébriques de type multiplicatif et *de même type* sur $\kappa(s)$ [19]. Je dis qu'un tel homomorphisme est nécessairement un isomorphisme (ce qui achèvera encore la démonstration [20]). En effet, on peut supposer, quitte à étendre le corps de base, que les deux groupes sur $\kappa(s)$ sont diagonalisables, et alors cela résulte de VIII 3.2 b) et du fait qu'un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}$-modules de type fini isomorphes $\mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est nécessairement bijectif.

Corollaire 3.9. — *Soient* A *un anneau* noethérien *muni d'un idéal* I *tel que* A *soit* séparé et complet *pour la topologie* I-*adique, et soit* H *un* S-*préschéma en groupes* de type fini, affine et plat sur S*,* à fibres connexes*.* **92**

Pour que H *soit un* tore isotrivial*, il faut et il suffit que* H_0 *le soit.*

[18] N.D.E. : L'original indiquait : « i.e. S_0 connexe ». Noter que, comme A est séparé pour la topologie I-adique, S_0 *rencontre chaque composante connexe de* S (et comme A est complet, les composantes connexes de S_0 et de S sont en bijection).

[19] N.D.E. : puisque G_s et H_s sont de même type pour tout $s \in S_0$, donc pour tout s.

[20] N.D.E. : car u sera à nouveau une immersion ouverte surjective.

4. Cas d'une base quelconque. Théorème de quasi-isotrivialité

Soit A un anneau local. Rappelons qu'on dit avec Nagata que A est *hensélien* si toute algèbre B finie sur A est produit d'algèbres *locales* B_i finies sur A.

Rappel 4.0. — [21] Soient A un anneau *local hensélien*, k son corps résiduel, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S_0 = \mathrm{Spec}(k)$, et ξ un point géométrique de S_0. Alors, le foncteur

$$X \longmapsto X_0 = X \underset{S}{\times} S_0$$

est une *équivalence* entre la catégorie des *revêtements étales* sur S et la catégorie analogue sur S_0 (cf. EGA IV_4, § 18.5). Par conséquent (cf. SGA 1, V), on a $\pi_1(S_0, \xi) = \pi_1(S, \xi)$.

Supposons de plus A *noethérien* et notons A' son complété, $S' = \mathrm{Spec}(A')$. Alors A' est un anneau local noethérien complet, donc hensélien (*loc. cit.*, 18.5.14), et le foncteur

$$X \longmapsto X' = X \underset{S}{\times} S',$$

de la catégorie des revêtements étales sur S vers la catégorie analogue sur S', s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rev.\acute{e}t.}(S) \arrow[rr] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \mathrm{Rev.\acute{e}t.}(S') \arrow[dl, "\simeq"] \\ & \mathrm{Rev.\acute{e}t.}(S_0) & \end{tikzcd}$$

donc est aussi une *équivalence de catégories*, d'où $\pi_1(S_0, \xi) = \pi_1(S', \xi)$.

Remarque 4.0.1. — Comme S est connexe (A étant local), il résulte de 1.2 que la catégorie des groupes de type multiplicatif *isotriviaux* sur S est *équivalente* à la catégorie analogue sur S_0 (et aussi sur S' si de plus A est noethérien).

Lemme 4.1. — *Soient* A *un anneau* local hensélien *de corps résiduel k,* $S = \mathrm{Spec}(A)$*,* $S_0 = \mathrm{Spec}(k)$*.*

(i) *Le foncteur*

$$H \longmapsto H_0 = H \underset{S}{\times} S_0$$

est une équivalence *entre la catégorie des groupes de type multiplicatif* finis *sur* S *et*
93 *la catégorie analogue sur* S_0*.*

(ii) *Si de plus* A *est* noethérien*, notant* A' *son complété et* $S' = \mathrm{Spec}(A')$*, le foncteur*

$$H \longmapsto H' = H \underset{S}{\times} S'$$

est une équivalence *entre la catégorie des groupes de type multiplicatif* finis *sur* S *et la catégorie analogue sur* S'*.*

[21] N.D.E. : On a détaillé ce rappel, et ajouté la remarque 4.0.1.

Comme en 4.0, la deuxième assertion est une conséquence de la première ; démontrons celle-ci. On sait déjà que le foncteur envisagé est essentiellement surjectif, car tout groupe de type multiplicatif H_0 sur $\mathrm{S}_0 = \mathrm{Spec}(k)$, *fini* donc de type fini sur k, est isotrivial par 1.4, donc provient d'un groupe de type multiplicatif isotrivial sur S, d'après 4.0.1.

Reste à prouver la pleine fidélité, i.e. que pour deux groupes G, H de type multiplicatif *finis* sur S, l'application ci-dessous est bijective :

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{G}_0, \mathrm{H}_0),$$

[(22)] c.-à-d., notant F le S-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$, que l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}, \mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{S}_0, \mathrm{F}_0)$$

induite par le changement de base $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$, est bijective. Pour ceci, compte tenu du rappel 4.0, il suffit de prouver le

Lemme 4.2. — *Soient* G, H *deux groupes de type multiplicatif* finis *sur un préschéma* S. *Alors* $\mathrm{F} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ *est représentable par un schéma* étale fini *sur* S.

[(23)] Soit $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme fidèlement plat et quasi-compact tel que G' et H' soient diagonalisables. Il suffit de montrer que $\mathrm{F}_{\mathrm{S}'}$ est représentable par un préschéma X' étale et fini (donc *affine*) sur S', car la donnée de descente sur X' relativement à f (cf. VIII 1.7.2) sera alors effective (d'après SGA 1 VIII, 2.1), d'où l'existence d'un S-préschéma X tel que $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' = \mathrm{X}'$, qui représente F, et est étale et fini sur S (cf. SGA 1, V 5.7 et EGA IV_4, 17.7.3 (ii)).

On peut donc supposer que $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{H} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{N})$, où M et N sont des groupes commutatifs *finis* (cf. VIII 2.1 c)). Alors, $\mathrm{K} = \mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ est un groupe abélien *fini* et, d'après VIII 1.5, on a un isomorphisme 94

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \simeq \mathrm{K}_{\mathrm{S}},$$

ce qui achève la démonstration de 4.2 et donc de 4.1.

Proposition 4.3.0. — [(24)] *Soient* S *un schéma local* hensélien, s *son point fermé,* g : $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un morphisme* localement de type fini, x *un point* isolé *de la fibre* X_s.

(i) *Alors* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *est* fini *sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$. (En particulier, si l'extension résiduelle $\kappa(x)/\kappa(s)$ est *triviale*, alors $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est surjectif, d'après le lemme de Nakayama.)

(ii) *Si de plus* g *est* séparé, *alors* $\mathrm{X}' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$ *est un sous-schéma* ouvert et fermé *de* X, *i.e. on a une décomposition en somme disjointe* $\mathrm{X} = \mathrm{X}' \coprod \mathrm{X}''$.

Démonstration D'après la forme locale du théorème principal de Zariski qu'on trouve dans [**Pes66**], ou [**Ray70**, Ch. IV, Th. 1], x possède un voisinage ouvert affine $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ de type fini et *quasi-fini* sur $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$, et il existe une immersion ouverte $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{C})$, où C est une A-algèbre *finie*. (N. B. pour parvenir à cette

(22) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.
(23) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
(24) N.D.E. : On a ajouté ce rappel, utilisé dans la preuve de 4.3 (la référence à EGA IV_4 18.5.11 n'étant pas totalement satisfaisante).

conclusion, on peut aussi utiliser le théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV_3, 13.1.4), puis la forme du théorème principal de Zariski donnée dans *loc. cit.*, 8.12.8.)

Comme A est hensélien, Y est la somme disjointe de schémas locaux $Y_1, \dots, Y_n$, chacun fini sur S, et les points de Y au-dessus de s sont les points fermés $y_1, \dots, y_n$. Donc $x = y_i$ pour un certain i, et $\mathscr{O}_{X,x} = \mathscr{O}_{U,x} = C_i$ est *fini* sur A. De plus, $X' = C_i$ est un sous-schéma *ouvert* de U donc de X.

Supposons de plus *g séparé*. Alors, comme le morphisme $X' \to S$ est fini (C_i étant fini sur A), il en est de même de l'immersion $X' \to X$ (cf. EGA II, 6.1.5 (v)), donc X' est aussi fermé dans X.

Lemme 4.3. — *Soient* A *un anneau* local noethérien hensélien, A' *son complété,* $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S' = \mathrm{Spec}(A')$, *s le point fermé de* S, G *et* H *deux* S-*préschémas en groupes, avec* G de type multiplicatif et de type fini *sur* S, H localement de type fini et séparé *sur* S, H_s de type multiplicatif, *et* H plat sur S en les points de H_s.

Soient G', H' *déduits de* G, H *par le changement de base* $S' \to S$. *Alors l'application naturelle ci-dessous est bijective :*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\text{S}'\text{-gr.}}(G', H').$$

Comme S' est fidèlement plat et quasi-compact sur S, on sait par SGA 1, VIII 5.2 que cette application est une bijection du premier membre sur la partie du deuxième formée des $u' : G' \to H'$ tels que les deux images inverses u_1'', $u_2'' : G'' \to H''$ de u' sur $S'' = S' \times_S S'$ (par les projections pr_1, pr_2 de S'' sur S') sont égales.

Donc tout revient à prouver que pour tout homomorphisme de S'-groupes $u' : G' \to H'$, on a $u_1'' = u_2''$. En vertu du théorème de densité IX 4.8 il suffit de prouver que u_1'' et u_2'' coïncident sur ${}_nG''$ pour tout entier $n > 0$. (N. B. on a besoin ici de façon essentielle du théorème de densité dans un cas où le préschéma de base, ici S'', *n'est pas localement noethérien*).

Cela nous ramène, remplaçant G par ${}_nG$, au cas où il existe un entier $n > 0$ tel que $n \cdot \mathrm{id}_G = 0$, donc où G est *fini* sur S. Soit de même ${}_nH$ le noyau du morphisme ϕ_n de puissance n-ème dans H. (N. B. nous n'avons pas supposé H commutatif, donc ϕ_n (resp. ${}_nH$) n'est pas nécessairement un homomorphisme de groupes (resp. un sous-
95 groupe de H).) Puisque ${}_nH$ est défini comme le produit fibré de $\phi_n : H \to H$ et de la section unité $\varepsilon : S \to H$, sa formation commute à tout changement de base $T \to S$, i.e. on a $({}_nH)_T = {}_n(H_T)$.

[25] On note avec un indice m à droite les réductions modulo $\mathfrak{m}^{m+1}$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A. Alors H_m est plat sur S_m (puisque H l'est sur S en les points de H_0) ; donc, d'après 2.4, comme H_0 est de type multiplicatif et de type fini, il en est de même de H_m. Donc chaque $({}_nH)_m = {}_n(H_m)$ est un *sous-groupe* de H_m, *de type multiplicatif, fini et plat* sur S_m.

En particulier, $({}_nH)_0 = {}_n(H_0)$ est fini sur S_0 ; puisque S est local hensélien et que ${}_nH$ est (comme H) localement de type fini et séparé sur S, alors, d'après 4.3.0, les

[25] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, sur la base d'indications de M. Raynaud.

anneaux locaux de ${}_n\mathrm{H}$ aux points de $({}_n\mathrm{H})_0$ sont *finis* sur S et l'on a une décomposition en somme disjointe d'ouverts

$$(*) \qquad {}_n\mathrm{H} = {}_n\mathrm{H}^+ \coprod {}_n\mathrm{H}^-,$$

où $\mathrm{Z} = {}_n\mathrm{H}^+$ est *fini* sur S, et ${}_n\mathrm{H}^-$ se situe au-dessus de $\mathrm{S} - \{s\}$.

Notons que, pour tout S-schéma fini Y (tel G), tout S-morphisme $\mathrm{Y} \to {}_n\mathrm{H}$ se factorise par Z, et que la formation de la décomposition $(*)$ commute au changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ (où $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}')$, A' le complété de A).

Alors $\mathrm{Z}' = \mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ est un schéma *fini* sur S', de même que $\mathrm{P}' = \mathrm{Z}' \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{Z}'$. Notons ν la restriction à P' de la multiplication de H' et σ l'automorphisme de P' qui échange les deux facteurs. Comme P' est fini sur S' et H' séparé et localement de type fini sur S', alors, d'après EGA II 5.4.3 et IV_1 1.1.3, $\mathrm{Y} = \nu(\mathrm{P}')$ est un sous-schéma fermé de H', universellement fermé et quasi-compact, donc de type fini, donc *propre* sur S'. De plus, $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}'$ est à fibres finies (puisque $\mathrm{P}' \to \mathrm{S}'$ l'est). Donc, comme S' est noethérien, le morphisme $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}'$ est *fini* (cf. EGA III, 4.4.2). Comme $\mathrm{Z}' \subseteq \mathrm{Y}$ et $\mathrm{Z}'_m = \mathrm{Y}'_m$ pour tout m, alors $\mathrm{Z}' = \mathrm{Y}$, d'après le lemme IX 5.0, donc Z' est un *sous-groupe* de H'. De même, le noyau $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(\nu, \nu \circ \sigma)$ est un sous-schéma fermé de P', tel que $\mathrm{K}_m = \mathrm{P}'_m$ pour tout m (puisque $\mathrm{Z}'_m = {}_n\mathrm{H}_m$ est commutatif), donc $\mathrm{K} = \mathrm{P}'$, i.e. Z' est un *sous-groupe commutatif* de H'.

D'autre part, comme chaque réduction $\mathrm{Z}'_m = {}_n\mathrm{H}_m$ est plate sur S_m, alors, d'après le « critère local de platitude » (cf. EGA 0_{III}, 10.2.2 ou [**BAC**], III § 5, Exemple 1 et Th. 1), Z' est *plat* sur S'. Comme, de plus, $\mathrm{Z}'_0 = {}_n\mathrm{H}_0$ est un groupe de type multiplicatif fini sur S_0, donc isotrivial d'après 1.4, alors Z' est de type multiplicatif (et isotrivial) sur S', d'après 3.8 b). Comme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est fidèlement plat et quasi-compact, on en déduit que la multiplication $\mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z} \to \mathrm{H}$ se factorise par Z et fait de Z un sous-groupe de H, fini sur S et de type multiplicatif (puisque Z' l'est).

Enfin, d'après les remarques faites plus haut sur la décomposition $(*)$, Z' est la « partie finie » de ${}_n\mathrm{H}'$, et donc le morphisme $u' : \mathrm{G}' \to {}_n\mathrm{H}'$ prend ses valeurs dans Z'. Comme Z est de type multiplicatif et *fini* sur S, ainsi que $\mathrm{G} = {}_n\mathrm{G}$, alors, d'après 4.1, u' provient d'un $u : \mathrm{G} \to \mathrm{Z}$, et donc $u''_1 = u''_2$. Ceci achève la démonstration de 4.3.

Lemme 4.4.0. — [26] *Soient* A *un anneau,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, H *un* S*-schéma en groupes de type multiplicatif et de type fini, quasi-isotrivial* (*resp. isotrivial*), (A_i) *une famille filtrante de sous-anneaux de* A *dont* A *soit la limite inductive,* $\mathrm{S}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_i)$.

Alors il existe un indice i et un S_i*-schéma en groupes* H_i*, de type multiplicatif et de type fini, quasi-isotrivial* (*resp. isotrivial*)*, tel que* $\mathrm{H} = \mathrm{H}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}$.

Théorème 4.4. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S*-préschéma en groupes* affine et de présentation finie *sur* S*, et* $s \in \mathrm{S}$*. On suppose :*

α) H *est* plat sur S en les points de H_s.

β) H_s *est* de type multiplicatif.

Alors il existe un morphisme étale $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*, un point* s' *de* S' *au-dessus de* s *tel que l'extension* $\kappa(s')/\kappa(s)$ *soit triviale, et un sous-groupe* ouvert et fermé G' *de* $\mathrm{H}' =$ 96

[26] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, utilisé à plusieurs reprises dans la suite.

$\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, *de type multiplicatif et de type fini,* isotrivial*, tel que* $\mathrm{G}'_{s'} = \mathrm{H}'_{s'}$.

[27] a) Notons provisoirement $\mathrm{T} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$ et montrons que, par « descente des conclusions », on peut se ramener au cas où $\mathrm{S} = \mathrm{T}$. En effet, supposons avoir trouvé un morphisme étale $g : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$, un point $s' \in \mathrm{T}'$ et un sous-groupe G' de $\mathrm{H}' = \mathrm{H}_{\mathrm{T}'}$ vérifiant les conditions de l'énoncé ; remplaçant T' par un voisinage ouvert affine de s', on peut supposer T' de présentation finie sur T.

Comme G' est isotrivial, il existe un morphisme étale fini surjectif $f : \widetilde{\mathrm{T}} \to \mathrm{T}'$ tel que $\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G}' \times_{\mathrm{T}'} \widetilde{\mathrm{T}}$ soit isomorphe à $\mathrm{D}_{\widetilde{\mathrm{T}}}(\mathrm{M})$, où M est un groupe abélien de type fini. Puisque T', H, et $\widetilde{\mathrm{T}}$, G' sont de présentation finie sur $\mathrm{T} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$, et que $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ est la limite inductive des sous-algèbres $\mathrm{A}_i = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}_i)$, où S_i parcourt les voisinages ouverts affines de s dans S, alors, d'après EGA IV_3, 8.8.2 (et l'Exp. VI_{B}, 10.2 et 10.3), il existe un indice i, des S_i-préschémas (resp. un S_i-préschéma en groupes) de présentation finie S'_i et $\widetilde{\mathrm{S}}_i$ (resp. G'_i), et des morphismes $g_i : \mathrm{S}'_i \to \mathrm{S}_i$ et $f_i : \widetilde{\mathrm{S}}_i \to \mathrm{S}'_i$ (resp. un morphisme de S_i-préschémas en groupes $u_i : \mathrm{G}'_i \to \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'_i$), dont f et g (resp. $u : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$) proviennent par le changement de base $\mathrm{T}' \to \mathrm{S}_i$. De plus, prenant i assez grand, g_i sera étale, f_i étale fini surjectif, et u_i une immersion ouverte et fermée (cf. EGA IV, 8.10.5 et 17.7.8).

Alors, $\widetilde{\mathrm{G}}$ provient des groupes $\widetilde{\mathrm{G}}_i = \mathrm{G}_i \times_{\mathrm{S}_i} \widetilde{\mathrm{S}}_i$ et $\mathrm{D}_{\widetilde{\mathrm{S}}_i}(\mathrm{M})$; donc, d'après EGA IV_3, 8.8.2 (i) (et VI_{B}, 10.2), il existe un indice $j \geqslant i$ tel que $\widetilde{\mathrm{G}}_j \simeq \mathrm{D}_{\widetilde{\mathrm{S}}_j}(\mathrm{M})$, donc G_j est de type multiplicatif isotrivial. Notons s'_j l'image de s' dans S'_j. Alors le morphisme étale $\mathrm{S}'_j \to \mathrm{S}_j \hookrightarrow \mathrm{S}$, le point s'_j et le sous-groupe ouvert et fermé G'_j de $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'_j$, vérifient les conditions de l'énoncé. Ceci montre qu'on peut supposer $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ local, de point fermé s.

b) Alors, A est la limite inductive d'anneaux locaux A_i qui sont des localisés de $\mathbb{Z}$-algèbres de type fini ; notons $\mathrm{S}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_i)$. Montrons que les hypothèses α) et β) « se descendent » à un certain A_i. Comme $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ est de présentation finie, l'ensemble des $x \in \mathrm{H}$ tels que H soit plat sur S en x est un ouvert W, qui contient H_s par hypothèse, donc contient un ouvert V quasi-compact contenant H_s (car H_s étant affine, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts affines contenus dans W). Alors l'immersion ouverte $\tau : \mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{H}$ est de présentation finie, donc $\mathrm{V} \to \mathrm{S}$ l'est aussi.

Donc, d'après EGA IV_3, 8.8.2 (et l'Exp. VI_{B}, 10.2 et 10.3), il existe un indice i, un S_i-préschéma V_i (resp. un S_i-préschéma en groupes H_i) de présentation finie sur S_i, et un S_i-morphisme $\tau_i : \mathrm{V}_i \to \mathrm{H}_i$ dont V, H et τ proviennent par le changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$; de plus, prenant i assez grand, τ_i sera une immersion ouverte et V_i sera plat sur S_i, d'après EGA IV_3, 8.10.5 et 11.2.6. Notons s_i l'image de s dans s_i ; comme l'immersion ouverte $(\mathrm{V}_i)_{s_i} \hookrightarrow (\mathrm{H}_i)_{s_i}$ donne, par le changement de base $\kappa(s_i) \to \kappa(s)$, l'égalité $\mathrm{V}_s = \mathrm{H}_s$, on a déjà $(\mathrm{V}_i)_{s_i} = (\mathrm{H}_i)_{s_i}$, i.e. $(\mathrm{H}_i)_{s_i} \subseteq \mathrm{V}_i$, donc H_i est plat sur S_i aux points de $(\mathrm{H}_i)_{s_i}$. Enfin, $(\mathrm{H}_i)_{s_i}$ est de type multiplicatif, puisque $\mathrm{H}_s = (\mathrm{H}_i)_{s_i} \otimes_{\kappa(s_i)} \kappa(s)$ l'est. Donc le triplet $(\mathrm{S}_i, \mathrm{H}_i, s_i)$ vérifie les hypothèses de 4.4, et si l'assertion voulue est vérifiée pour ce triplet, elle le sera aussi, par changement de

[27] N.D.E. : On a détaillé les réductions qui suivent (l'original indiquait : « On se ramène aussitôt au cas où S est le spectre d'un anneau local noethérien A, et où s est le point fermé de S. »).

base, pour $(\mathrm{S},\mathrm{H},s)$. Ceci nous ramène au cas où A est *local et noethérien.* Distinguons maintenant deux cas.

1°) A est local noethérien *et hensélien.* Soient $\widehat{\mathrm{A}}$ son complété, $\widehat{\mathrm{S}} = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}})$, et $\widehat{\mathrm{H}} = \mathrm{H}\times_{\mathrm{S}}\widehat{\mathrm{S}}$. Appliquons le théorème 3.7, on trouve un $\widehat{\mathrm{S}}$-groupe $\widehat{\mathrm{G}}$ de type multiplicatif, isotrivial et de type fini, et un homomorphisme de $\widehat{\mathrm{S}}$-groupes

$$\widehat{u} : \widehat{\mathrm{G}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{H}}$$

qui est une immersion ouverte et une immersion fermée, telle que $\widehat{u}$ induise un isomorphisme $\widehat{u}_0 : \widehat{\mathrm{G}}_0 \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{H}}_0$.

D'après la remarque 4.0.1, le foncteur changement de base par $\widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$ induit une équivalence entre la catégorie des groupes de type multiplicatif isotriviaux sur S, et sur $\widehat{\mathrm{S}}$; en particulier $\widehat{\mathrm{G}}$ « provient » d'un S-groupe de type multiplicatif G, isotrivial et de type fini. En vertu de 4.3, $\widehat{u}$ provient d'un homomorphisme

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H};$$

de plus u est une immersion ouverte et fermée et induit un isomorphisme $u_0 : \mathrm{G}_0 \to \mathrm{H}_0$, puisque il en est ainsi après le changement de base fidèlement plat quasi-compact $\widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$. Cela prouve donc 4.4 dans ce cas (en prenant bien entendu, dans la conclusion de 4.4, $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$ et $s' = s$).

2°) A est local noethérien. La réduction au cas 1°) est immédiate, en appliquant 1°) à l'anneau A^h « hensélisé » de A. De façon précise, on voit facilement (utilisant SGA 1, I § 5 (*)) que les anneaux locaux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'}$ des S-préschémas étales S′ munis d'un point s' au-dessus de s tel que $\kappa(s')/\kappa(s)$ soit triviale, forment un système inductif filtrant, dont la limite inductive est un anneau local noethérien hensélien A^h (appelé l'anneau « hensélisé » de A) ; pour des détails de cette construction (due à Nagata dans le cas normal), cf. SGA 4, VIII § 4 (*). Les sorites de EGA IV_3 § 8 permettent **97**
alors, comme dans la partie a) de la démonstration, de déduire d'un résultat connu sur la limite inductive A^h des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'}$, un résultat analogue sur un des (S', s'), ce qui prouve 4.4.

Corollaire 4.5. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S-*préschéma en groupes* de type multiplicatif et de type fini. *Alors* H *est* quasi-isotrivial, *i.e. est déployé par un morphisme étale surjectif* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

En effet, soit $s \in \mathrm{S}$. D'après 4.4, il existe un morphisme étale $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, un $s' \in \mathrm{S}'$ au-dessus de s tel que $\kappa(s) = \kappa(s')$, et un sous-groupe G′ de H′, de type multiplicatif isotrivial et de type fini, tel que $\mathrm{G}'_{s'} = \mathrm{H}'_{s'}$. Comme G′ et H′ sont de type multiplicatif et de type fini alors, d'après IX 2.9, il existe un voisinage ouvert U′ de s' tel que $\mathrm{G}'|_{\mathrm{U}'} = \mathrm{H}'|_{\mathrm{U}'}$.

[28] Supposons de plus S *local hensélien*, de point fermé s ; alors, d'après EGA IV_4, 18.5.11 b), il existe une section σ de $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ telle que $\sigma(s) = s'$. (N. B. on peut

(*) ou EGA IV_4, § 18.6.

[28] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui précède, et ce qui suit.

voir directement que $B = \mathscr{O}_{S',s'}$ égale $A = \mathscr{O}_{S,s}$ comme suit : d'après 4.3.0 (i), on a $B \simeq A/I$, et comme B est une A-algèbre de présentation finie et plate, I est un idéal de type fini (cf. EGA IV_1, 1.4.7), et $I = I\mathfrak{m}$ (où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A), d'où $I = 0$.) Donc H est déjà isotrivial. On obtient donc :

Corollaire 4.6. — *Soient* A *un anneau* local hensélien*, k son corps résiduel, et π le groupe de Galois topologique d'une clôture algébrique de k.*

(i) *Tout groupe* de type multiplicatif et de type fini *sur* $S = \mathrm{Spec}(A)$ *est* isotrivial.

(ii) *La catégorie de ces groupes sur* S *est* équivalente (*via le foncteur* $H \mapsto H \otimes_A k$) *à la catégorie analogue sur* $S_0 = \mathrm{Spec}(k)$ *; elle est donc* anti-équivalente*, d'après* 1.4*, à la catégorie des modules galoisiens sous π, qui sont de type fini comme $\mathbb{Z}$-modules.*

Corollaire 4.7. — *Sous les conditions de* 4.4 *supposons de plus* l'une *des conditions suivantes vérifiées :*

a) *Pour toute générisation t de s, H_t est de type multiplicatif et de même type que H_s.*

b) H *est commutatif et les ${}_nH$ $(n > 0)$ sont finis sur* S *au voisinage de s.*

c) *Pour toute générisation t de s, la fibre H_t est connexe.*

Alors il existe un voisinage ouvert U *de s tel que $H|_U$ soit de type multiplicatif.*

98 Compte tenu qu'un morphisme étale est ouvert, on est ramené à prouver qu'il existe (avec les notations de la conclusion de 4.4) un voisinage ouvert U' de s' tel que $G'|_{U'} = H'|_{U'}$. Posons $S'' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S',s'})$; comme G' et H' sont de présentation finie sur S', il suffit de montrer, d'après EGA IV_3, 8.8.2, que $G'' = H''$. On peut donc supposer $S = S''$, et alors les hypothèses (a), (b), (c) deviennent celles du lemme ci-dessous, dont la démonstration est la même que celle de 3.8 :

Lemme 4.7.1. — *Soient* S *un schéma* local*, s son point fermé,* H *un* S*-schéma en groupes* de type fini*,* G *un sous-groupe* ouvert et fermé *de* H*,* de type multiplicatif*, tel que $G_s = H_s$. On suppose de plus vérifiée* l'une *des conditions suivantes :*

a) *Les fibres de* H *sont de type multiplicatif et de même type que H_s.*

b) H *est commutatif et les ${}_nH$ $(n > 0)$ sont finis sur* S.

c) *Les fibres de* H *sont connexes.*

Alors $G = H$.

Corollaire 4.8. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S*-préschéma en groupes* affine, plat et de présentation finie sur S*,* à fibres de type multiplicatif.

Pour que H *soit de type multiplicatif, il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des deux conditions suivantes* (*équivalentes moyennant les conditions qui précèdent*) *:*

a) *Le type de H_s* (*cf.* IX 1.4) *est une fonction localement constante de $s \in$* S.

b) H *est commutatif, et les ${}_nH$ $(n > 0)$ sont finis sur* S.

De plus, ces conditions a), b) *sont impliquées par la suivante :*

c) *Les fibres de* H *sont connexes.*

En particulier, on trouve :

Corollaire 4.9. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S*-préschéma en groupes* plat et de présentation finie *sur* S*. Supposons de plus* H affine sur S *et* à fibres connexes*.* [29] *Si* $s \in \mathrm{S}$ *est tel que* H_s *soit un tore, il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $\mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ *soit un tore.*

En particulier, si toutes les fibres de H *sont des tores,* H *est un tore.*

5. Schéma des homomorphismes d'un groupe de type multiplicatif dans un autre. Groupes constants tordus et groupes de type multiplicatif

Définition 5.1. — a) Soient S un préschéma, R un préschéma en groupes sur S. On dit que R est un *groupe constant tordu* sur S s'il est localement isomorphe, au sens de la **99**
topologie fidèlement plate quasi-compacte, à un schéma en groupes constant, i.e. de la forme M_{S} avec M un groupe ordinaire.

b) On dit que le groupe constant tordu R sur S est *quasi-isotrivial*, resp. *isotrivial*, resp. *localement isotrivial*, resp. *localement trivial*, resp. *trivial*, si dans la définition ci-dessus on peut remplacer la topologie fidèlement plate quasi-compacte par la topologie étale, resp. la topologie étale finie globale, resp. la topologie étale finie, resp. la topologie de Zariski, resp. la topologie la moins fine (ou « chaotique »), cf. IX 1.1 et 1.2, et IV 6.6.

Dire que R est quasi-isotrivial (resp. isotrivial) signifie donc qu'il existe un morphisme étale surjectif (resp. et fini) $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ tel que $\mathrm{R}' = \mathrm{R} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ soit un groupe constant sur S ; dire qu'il est trivial signifie que R est un groupe constant.

c) On définit comme dans VIII 1.4 le *type* d'un groupe constant tordu R sur S en un $s \in \mathrm{S}$; c'est une classe de groupes ordinaires à isomorphisme près, qui pour s variable est une fonction localement constante en s, donc constante si S est connexe. On dira aussi que R est « de type M » si toutes les fibres de R sont de type M.

On fera attention que R n'est quasi-compact sur S que s'il est *fini* sur S, i.e. si son type en tout $s \in \mathrm{S}$ est un groupe fini. [30]

d) Le cas le plus intéressant pour nous est celui où R est *commutatif.* Nous dirons alors que R est « *à engendrement fini* » si son type en tout point $s \in \mathrm{S}$ est donné par un $\mathbb{Z}$-module de type fini, notion qu'il ne faut pas confondre avec la notion schématique « R de type fini sur S » (cf. ci-dessus).

Remarque 5.2. — Nous aurons aussi à considérer des S-préschémas X qui sont localement isomorphes (pour la topologie fidèlement platequasi-compacte) à des préschémas constants, indépendamment de toute structure de groupe. Nous dirons alors que X est un *fibré constant tordu* sur S, et étendrons à ces préschémas la terminologie introduite dans 5.1. Bien entendu, on fera attention que lorsque X est muni d'une structure de S-groupe, le sens des expressions « constant tordu », « isotrivial » etc. change, suivant qu'on tient compte ou non de la structure de groupe sur S. Il en est de même si on **100**

[29] N.D.E. : Ce résultat est généralisé en 8.1 : il suffit en fait de supposer que les fibres de H soient *affines et connexes.*

[30] N.D.E. : Voir le lemme 5.12 plus bas.

considère sur X toute autre espèce de structure algébrique (par exemple celle de fibré principal galoisien qui sera considérée au numéro suivant).

Proposition 5.3. — *Soit* R *un groupe constant tordu commutatif sur* S.

(i) *Le foncteur* $\mathrm{H} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{R})$ (cf. VIII 1) *est* représentable *et est un groupe de type multiplicatif sur* S.

(ii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *le* type *de* R *en* s *est égal à celui de* H *en* s.

(iii) *Pour que* R *soit quasi-isotrivial* (*resp. isotrivial, resp. trivial, resp. localement isotrivial, resp. localement trivial*) *il faut et il suffit que* H *le soit.*

Remarque 5.3.1. — [(31)] On s'inquiète peut-être de voir dans 5.3 employer le terme « type » dans deux sens différents suivant qu'il s'agit de R et de H ; heureusement, lorsqu'un S-préschéma en groupes G est à la fois un groupe constant tordu et de type multiplicatif, son type dans l'un et l'autre sens est le même, grâce au fait qu'un groupe commutatif fini ordinaire est isomorphe à son dual !

Démonstration. Comme les familles couvrantes pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte sont des familles de descente effective pour la catégorie fibrée des préschémas en groupes *affines* sur des préschémas de base variables (SGA 1, VIII 2.1), on voit que H est représentable (et est affine sur S), puisqu'il l'est « localement » [(32)] (car il l'est lorsque R est constant, et alors H est un groupe diagonalisable).

Le fait que H soit de type multiplicatif est alors évident par définition, de même que le fait que le type de R et H en $s \in \mathrm{S}$ est le même. Enfin, puisque $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{R}_{\mathrm{S}'})$, la dernière assertion est réduite au cas « trivial », i.e. à vérifier que R est trivial si et seulement si H l'est, ce qui résulte aussitôt du théorème de bidualité VIII 1.2

Pour finir de préciser la correspondance entre groupes constants tordus et groupes de type multiplicatif, il faut partir d'un groupe de type multiplicatif H, et étudier $\mathrm{R} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$. Si ce dernier est représentable, c'est évidemment un groupe constant tordu, et on aura $\mathrm{H} \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{R})$. En d'autres termes :

Scholie 5.4.0. — Le foncteur $\mathrm{R} \mapsto \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{R})$ est une anti-équivalence [(33)] entre la catégorie des groupes constants tordus sur S et celle des groupes de type multiplicatif H
101 sur S *tels que* $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ *soit représentable.*

J'ignore si cette condition sur H est toujours satisfaite ; nous allons voir cependant qu'elle l'est lorsque H est quasi-isotrivial, en particulier lorsque H est de type fini.

Lemme 5.4. — *Soient* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme* fidèlement plat localement de présentation finie, X' *un* S'*-préschéma* séparé, localement de présentation finie et localement quasi-fini *sur* S'.

Alors toute donnée de descente sur X' *relativement à* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *est* effective, *i.e. il existe un* S*-préschéma* X, *et un* S'*-isomorphisme* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \simeq \mathrm{X}'$ *compatible avec la donnée de descente.*

---

(31) N.D.E. : On a déplacé ici cette remarque, figurant dans l'original après la démonstration.
(32) N.D.E. : cf. VIII § 1.7.
(33) N.D.E. : On a corrigé « équivalence » en anti-équivalence ».

On a déjà remarqué que l'hypothèse sur $S' \to S$ implique que c'est un morphisme couvrant pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte (IV 6.3.1 (iv)), a fortiori un morphisme de descente effective.

Lorsque $X' \to S'$ est quasi-compact donc de présentation finie et quasi-fini, alors c'est un morphisme quasi-affine (cf. SGA 1, VIII 6.2 [(34)]), et l'effectivité résulte dans ce cas de SGA 1, VIII 7.9. Dans le cas général, on se ramène aussitôt au cas où S et S' sont affines. On recouvre X' par des ouverts affines U'_i ; soit V'_i le saturé de U'_i pour la relation d'équivalence dans X' définie par la donnée de descente, i.e. $V'_i = q_2(q_1^{-1}(U'_i))$, où q_1, q_2 sont les deux projections de $X''_1 = X' \times_{S'} (S'', p_1)$ sur X' ($q_1 = \mathrm{pr}_1$, et q_2 est déduit de la première projection de $X''_2 = X' \times_{S'} (S'', p_2)$ grâce à l'isomorphisme de descente donné $X''_1 \simeq X''_2$). Comme $S' \to S$ est fidèlement plat quasi-compact localement de présentation finie, il en est de même de $p_1 : S'' = S' \times_S S' \to S'$ donc aussi de q_1 et q_2, qui sont par suite des morphismes *ouverts* (SGA 1 IV 6.6 [(35)]). Par suite, V'_i est une partie *ouverte et quasi-compacte* de X'. D'après ce qu'on a déjà vu, les données de descente induites dans les V'_i sont effectives, d'où résulte qu'il en est de même de celle de X' (SGA 1, VIII 7.2).

Corollaire 5.5. — *Un morphisme* $S' \to S$ fidèlement plat de présentation finie *est un morphisme* de descente effective *pour la catégorie fibrée des groupes* constants tordus (*sur des préschémas de base variables*).

En effet, cela revient à affirmer l'effectivité d'une donnée de descente sous les conditions de 5.4, lorsque X' est un S'-préschéma *constant*. 102

Théorème 5.6. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* H *deux* S-*préschémas en groupes* de type multiplicatif quasi-isotriviaux, *avec* G [(36)] de type fini.

Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ *est* représentable *par, et est un groupe* constant tordu quasi-isotrivial *sur* S *;* [(37)] *pour tout* $s \in S$*, si le type en* s *de* G (*resp.* H) *est* M (*resp.* N)*, celui de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ *est* $\mathrm{Hom}_{\text{gr.}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$.

On procède comme dans 4.2, en utilisant le fait que l'assertion est établie (VIII 1.5) lorsque G et H sont triviaux. Le critère d'effectivité nécessaire est fourni par 5.5 (dans le cas d'un morphisme $S' \to S$ étale surjectif).

En particulier, faisant $G = \mathbb{G}_{m,S}$, on trouve :

Corollaire 5.7. — (i) *Soit* H *un* S-*groupe* de type multiplicatif quasi-isotrivial*, alors le* S-*groupe* $D_S(H)$ *est* représentable *et est un groupe* constant tordu quasi-isotrivial *sur* S.

(ii) *Les foncteurs* $R \mapsto D_S(R)$ *et* $H \mapsto D_S(H)$ *sont des* anti-équivalences*, quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des* S-*groupes constants tordus quasi-isotriviaux et celle des* S-*groupes de type multiplicatif quasi-isotriviaux.*

(34) N.D.E. : (lorsque S' est localement noethérien, et EGA IV_3, 8.11.2 en général).
(35) N.D.E. : (lorsque S' est localement noethérien, et EGA IV_2, 2.4.6 en général).
(36) N.D.E. : On a corrigé H en G.
(37) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

(iii) *Ces foncteurs induisent des anti-équivalences entre les sous-catégories formées des groupes isotriviaux, resp. localement isotriviaux, resp. localement triviaux, resp. triviaux.*

La dernière assertion n'est mise que pour mémoire, étant déjà contenue dans 5.3.

De plus, comme tout S-groupe de type multiplicatif et de type fini est *quasi-isotrivial*, d'après 4.5, on déduit de 5.6 :

Corollaire 5.8. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* H *deux* S-*préschémas en groupes* de type multiplicatif et de type fini, *alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ *est* représentable *et est un* S-*groupe* constant tordu quasi-isotrivial à engendrement fini *sur* S.

Notons aussi que dans 5.3, R est à engendrement fini si et seulement si $\mathrm{H} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{R})$ est de type fini (IX 2.1 b)). En vertu de 4.5, H est alors quasi-isotrivial, donc R est quasi-isotrivial. On trouve ainsi :

103 ***Corollaire 5.9***. — *Les foncteurs de* 5.7 *induisent des anti-équivalences quasi-inverses l'une de l'autre entre la catégorie des* S-*groupes* H de type multiplicatif de type fini*, et celle des* S-*groupes* R constants tordus à engendrement fini *; de plus, tout tel groupe* R *est* quasi-isotrivial.

Corollaire 5.10. — *Soient* H, G *deux* S-*préschémas en groupes* de type multiplicatif et de type fini.

(i) *Alors* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$ *est* représentable *par un sous-préschéma ouvert et fermé de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$*, et c'est un* S-préschéma constant tordu.

(ii) *En particulier,* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H})$ *est* représentable *et est un* S-groupe constant tordu (*en général non commutatif*).

Cela résulte de 5.8 et de VIII 1.6. [38]

Rappel 5.11.0. — [39] Rappelons que si X est un préschéma *localement noethérien*, ses composantes connexes (qui sont toujours fermées) sont *ouvertes*. En effet, soient C une composante connexe de X, $x \in \mathrm{C}$ et U un voisinage ouvert *noethérien* de x, alors U n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, donc la composante connexe U_x de x dans U est ouverte dans U donc dans X ; comme $\mathrm{U}_x \subseteq \mathrm{C}$, ceci montre que C est ouverte dans X

Proposition 5.11. — *Soient* S *un préschéma,* R *un groupe* constant tordu commutatif *sur* S*,* $\mathrm{H} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{R})$ *le groupe de type multiplicatif qu'il définit. Considérons les conditions suivantes :*

(i) H *est* isotrivial (*i.e.* R *est isotrivial*).

(ii) R *est réunion de sous-préschémas à la fois* ouverts et fermés R_i*, qui sont* quasi-compacts *sur* S (*et alors nécessairement* finis sur S).

[38] N.D.E. : Corriger cette référence en traitant le cas du foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}$ S-gr.(H, G) dans un ajout 1.5.1 dans VIII ...

[39] N.D.E. : On a ajouté ce rappel, utilisé à plusieurs reprises dans la suite. (Voir aussi EGA I, 6.1.9 ; noter toutefois que la démonstration de *loc. cit.* paraît inutilement compliquée).

(iii) *Les* composantes connexes *de* R *sont* finies sur S.

a) *Alors* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). [40]

b) *On a* (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) *si* S *est* localement noethérien.

c) *Enfin,* (i) $\Leftrightarrow$ (ii) *si* R *est* à engendrement fini (*i.e. si* H *est* de type fini *sur* S)*, du moins si* S *est* quasi-compact *ou si ses composantes connexes sont* ouvertes.

Décomposant d'abord S en préschéma somme de préschémas S_i sur chacun desquels H est de type constant (cf. IX 1.4.1), on est ramené au cas où H donc R est de type constant M. Nous aurons besoin du

Lemme 5.12. — *Soient* S *un préschéma,* R *un* préschéma constant tordu *sur* S*. Alors tout sous-préschéma* fermé Z *de* R *qui est* quasi-compact sur S *est* fini *sur* S.

En effet, on est ramené au cas où R est constant, donc de la forme $\mathrm{I_S}$, où I est un ensemble, donc réunion filtrante croissante des $\mathrm{J_S}$, où J parcourt les parties finies de I. On peut supposer de plus S affine, alors Z est quasi-compact, donc contenu dans un des $\mathrm{J_S}$. Comme $\mathrm{J_S}$ est fini sur S, il en est de même de Z. **104**

Le lemme 5.12 établit déjà l'assertion entre parenthèses dans 5.11 (ii). [41] L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est alors claire, puisque les composantes connexes de R sont fermées ; d'après 5.11.0 elles sont ouvertes et fermées si S est localement noethérien (R étant étale, donc localement de type fini sur S), d'où (iii) $\Rightarrow$ (ii) dans ce cas.

Prouvons que (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour ceci, soit $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme étale fini surjectif qui déploie H donc R (cf. 5.3), de sorte que R′ est isomorphe à $\mathrm{M_{S'}} = \coprod_{m\in\mathrm{M}} \mathrm{R}'_m$, où les R'_m sont des ouverts disjoints de R′, S′-isomorphes à S′. Soit $g : \mathrm{R}' \to \mathrm{R}$ la projection, qui est un morphisme fini étale surjectif, donc un morphisme ouvert et fermé ; alors les $\mathrm{R}_m = g(\mathrm{R}'_m)$ sont des parties à la fois ouvertes et fermées de R, et évidemment quasi-compactes sur S puisque les R'_m le sont.

Enfin, supposons H de type fini sur S, et prouvons (ii) $\Rightarrow$ (i). Le cas où les composantes connexes de S sont ouvertes se ramène aussitôt au cas où S est connexe, donc on peut supposer S quasi-compact ou connexe. Comme M est à engendrement fini, on peut écrire $\mathrm{M} = \mathbb{Z}^r \times \mathrm{N}$, où r est un entier $\geqslant 0$ et N un groupe abélien fini. Soit $\mathrm{G} = \mathrm{D_S(M)}$; considérons les préschémas

$$\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H},\mathrm{G}) \subset \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H},\mathrm{G}) = \mathrm{Q}$$

cf. 5.8 et 5.10. On a des isomorphismes

$$\mathrm{Q} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{M_S},\mathrm{R}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathbb{Z}^r_{\mathrm{S}},\mathrm{R}) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{N_S},\mathrm{R}) \simeq \mathrm{R}^r \times \mathrm{E}\,,$$

où $\mathrm{E} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{N_S},\mathrm{R})$ est *fini* sur S [42]. Il s'ensuit que Q est réunion de sous-préschémas à la fois ouverts et fermés Q_i finis sur S. Donc P est réunion des sous-préschémas à la fois ouverts et fermés $\mathrm{P}_i = \mathrm{P} \cap \mathrm{Q}_i$, finis sur S. Comme ils sont étales sur S, leurs images dans S sont des parties S_i à la fois ouvertes et fermées, et elles recouvrent S. Si S est connexe ou quasi-compact, il existe donc un ensemble fini **105**

[40] N.D.E. : Comparer avec les exemples de 1.6 ...

[41] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[42] N.D.E. : car c'est un groupe constant tordu de type $\mathrm{End_{gr.}(N)}$ (cf. 5.6 et 5.8).

d'indices i tels que les S_i recouvrent S, soit S′ la réunion des P_i correspondants. Alors $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est fini étale surjectif, et posant $\mathrm{P}' = \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' = \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}'\text{-gr.}}(\mathrm{H}', \mathrm{G}')$, on voit que P′ a une section sur S′, donc il existe un isomorphisme de S′-groupes

$$\mathrm{H}' = \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}' = \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}' = \mathrm{D}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{M}),$$

ce qui prouve que S′ déploie H. Ceci achève la preuve de 5.11 [43].

Remarque 5.11 bis. — Remarquons d'ailleurs qu'on peut, lorsque H est de type fini sur S et de type constant, donner le critère d'isotrivialité suivant (où il n'est plus nécessaire de faire aucune restriction sur S) : $\mathrm{H} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{R})$ est isotrivial si et seulement si R est réunion d'une *suite* de parties à la fois ouvertes et fermées finies sur S. [44]

Lemme 5.13. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien et connexe*,* P *un* S-*préschéma* constant tordu quasi-isotrivial*,* Z *une partie à la fois* ouverte et fermée *de* P*, telle qu'il existe un* $s \in \mathrm{S}$ *tel que* Z_s *soit* fini*. Alors* Z *est* fini *sur* S.

Ne supposons pas d'abord S connexe : soit U l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que Z_s soit fini, nous allons prouver que U est à la fois ouvert et fermé, et que $\mathrm{Z}|_{\mathrm{U}}$ est fini sur U. C'est là évidemment un énoncé essentiellement équivalent à 5.13 mais qui a l'avantage d'être « de nature locale » sur S pour la topologie étale (disons), ce qui nous ramène au cas où P est constant, i.e. de la forme I_{S}, où I est un ensemble. (N. B. l'hypothèse localement noethérienne n'est pas perdue par un changement de base étale ; c'est là où on utilise la quasi-isotrivialité de P sur S).

On peut de plus supposer S connexe, puisque ses composantes connexes sont ouvertes (S étant localement noethérien). Mais alors on a nécessairement $\mathrm{Z} = \mathrm{J}_{\mathrm{S}}$, où J est une partie de I, et on a donc $\mathrm{U} = \varnothing$ ou $\mathrm{U} = \mathrm{S}$, suivant que J est infini ou fini, ce qui donne la conclusion voulue.

Rappels 5.14.0. — [45] Soit S un préschéma *localement noethérien*, et soit $\widetilde{\mathrm{S}}$ le normalisé de $\mathrm{S}_{\mathrm{réd}}$ (cf. EGA II, 6.3.8). Rappelons que S est dit *géométriquement unibranche* (cf. EGA 0_{IV}, § 23.2 et IV_2, § 6.15) si le morphisme canonique $\widetilde{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$ est *radiciel* (et donc un homéomorphisme universel) ; en particulier, les composantes connexes de S sont irréductibles.

Supposons alors S connexe, donc irréductible, soit η son point générique et soit $f : \mathrm{P} \to \mathrm{S}$ un morphisme *plat et localement quasi-fini*. Soient P_i les composantes irréductibles de P, et ξ_i le point générique de P_i. Comme P est plat sur S, chaque ξ_i

[43] N.D.E. : modulo la vérification que (ii) ⇒ (i) lorsque S est localement noethérien et R n'est pas à engendrement fini ...

[44] N.D.E. : Détailler ce point : M étant un $\mathbb{Z}$-module de type fini, il est dénombrable, et la démonstration de 5.11 (i) ⇒ (ii) montre que R est réunion d'une famille dénombrable de parties ouvertes et fermées, finies sur S. Il faudrait voir la réciproque ...

[45] N.D.E. : L'original traitait en 5.14 le cas où S est localement noethérien et *normal*, et signalait en Remarque 5.15 que le raisonnement s'applique, plus généralement, si on suppose seulement S *géométriquement unibranche* au lieu de normal. On a modifié en conséquence l'énoncé de 5.14 (et ausi 5.16), et l'on a ajouté ces « rappels », tirés de EGA IV_4, 18.10.6 et 18.10.7, qui montrent que la preuve de 5.14 s'applique *verbatim* au cas géométriquement unibranche.

est au-dessus de η (cf. EGA IV$_2$, 2.3.4), et donc $(\mathrm{P}_i)_\eta = \mathrm{P}_i \cap \mathrm{P}_\eta$ est l'adhérence de ξ_i dans P_η. Puisque la fibre P_η est discrète, on a donc $(\mathrm{P}_i)_\eta = \{\xi_i\}$. Ceci s'applique en particulier lorsque f est *étale* ; dans ce cas, P est aussi localement noethérien et géométriquement unibranche (cf. EGA IV$_4$, 17.5.7), donc ses composantes irréductibles sont ses composantes connexes et sont ouvertes (et fermées).

Corollaire 5.14. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien et géométriquement unibranche*,* P *un* S-*préschéma* constant tordu quasi-isotrivial*. Alors les composantes connexes de* P *sont* finies *sur* S*.*

On peut évidemment supposer S connexe donc irréductible, soit η son point générique. D'après ce qui précède, chaque composante connexe P_i de P est ouverte et fermée, et rencontre la fibre P_η en un seul point. Donc 5.13 s'applique et montre que chaque P_i est fini sur S. **106**

Théorème 5.16. — [46] *Soit* S *un préschéma* localement noethérien et géométriquement unibranche*. Alors tout* S-*groupe* de type multiplicatif et de type fini *est* isotrivial*.*

On peut supposer en effet S connexe, donc H de type constant M. Il suffit d'appliquer 5.14 à $\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathrm{G})$, où $\mathrm{G} = \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$, puis de raisonner comme dans la démonstration de 5.11 (ii) $\Rightarrow$ (i). On peut aussi appliquer 5.14 à $\mathrm{P} = \mathrm{R} = \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{H})$ (cf. 5.9), puis utiliser 5.11.

6. Revêtements principaux galoisiens infinis et groupe fondamental élargi

(Les résultats du présent N° et du suivant ne seront plus utilisés dans la suite de ce Séminaire).

Soit S un préschéma, nous nous proposons de déterminer les fibrés principaux homogènes P sur S de groupe structural de la forme G_S, le S-groupe constant défini par **107**
un groupe ordinaire G (pas nécessairement fini), qu'on appellera aussi *fibrés principaux galoisiens* sur S de groupe G. Nous prenons « fibré principal » au sens de la topologie fidèlement plate et quasi-compacte (cf. Exp. IV, Déf. 5.1.5), mais on notera que pour un tel P, le morphisme structural $\mathrm{P} \to \mathrm{S}$ est nécessairement étale et surjectif, donc couvrant pour la topologie étale, par suite P est aussi localement trivial pour la topologie étale (cf. IV, Prop. 5.1.6). [47]

Nous supposerons que S est somme de préschémas connexes, i.e. que ses composantes connexes sont ouvertes, ce qui nous ramène aussitôt au cas où S est connexe. Nous choisirons alors un « point géométrique » ξ de S, i.e. un S-schéma ξ qui soit le spectre d'un corps algébriquement clos $\Omega = \kappa(\xi)$. Alors pour tout fibré principal galoisien P sur S de groupe G, P_ξ est un fibré principal galoisien sur le corps algébriquement clos $\kappa(\xi)$, donc est trivial. Nous préciserons donc le problème initial en nous

[46] N.D.E. : On a supprimé la remarque 5.15, rendue obsolète par l'ajout 5.14.0 (cf. la N.D.E. précédente), et dans 5.16 on a remplacé « normal » par « *géométriquement unibranche* ».

[47] N.D.E. : Noter que P est supposé être un *préschéma* — dans le cas a priori plus général d'un faisceau (fpqc) P qui est un G_S-torseur, P est-il nécessairement représentable ?

proposant de déterminer la catégorie des fibrés principaux galoisiens sur S *pointés* au-dessus de ξ, i.e. munis d'un S-homomorphisme $\xi \to \mathrm{P}$, i.e. d'une trivialisation de P_ξ. Pour G fixé, l'ensemble des classes de tels fibrés, à un isomorphisme près respectant le point-base, sera noté $\pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$. Alors l'ensemble $\pi^1(\mathrm{S}; \mathrm{G})$ des classes à isomorphisme près de fibrés principaux galoisiens sur S de groupe G (sans point-base précisé) est isomorphe à l'ensemble des orbites de G dans $\pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$ (compte tenu des opérations naturelles de G sur cet ensemble, correspondant à la translation par G du point marqué dans un fibré principal galoisien pointé P) :

$$\pi^1(\mathrm{S}; \mathrm{G}) = \pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})/\mathrm{G}\,.$$

Pour tout morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ qui est un morphisme de descente effective universelle pour la catégorie fibrée des préschémas constants tordus sur une base variable (par exemple $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fidèlement plat et localement de présentation finie, cf. 5.4 ; pour d'autres exemples cf. SGA 1 IX), nous nous proposons de déterminer les sous-
108 ensembles des ensembles précédents, notés $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$ et $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}; \mathrm{G})$, formés des fibrés principaux galoisiens sur S *qui deviennent triviaux sur* S′ (ou, comme on dit, sont « *déployés* » par S′). On déterminera en fait la catégorie des fibrés principaux galoisiens P sur S qui sont déployés par S′. Bien entendu, on aura alors

$$\pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G}) = \varinjlim_{\mathrm{S}'} \pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})\,,$$

où dans le deuxième membre, S′ parcourt un système cofinal dans l'ensemble des S'/S couvrants pour la topologie étale (par exemple, lorsque S est quasi-compact, l'ensemble des S′ sur S qui sont quasi-compacts et à morphisme structural étale et surjectif). De même, la catégorie des fibrés principaux galoisiens sur S sera la limite inductive des sous-catégories définies par les S′ (formées des fibrés qui sont déployés sur S′).

Grâce à l'hypothèse faite sur S'/S, la catégorie des fibrés principaux galoisiens sur S déployés par S′ est équivalente à la catégorie des fibrés principaux galoisiens triviaux sur S′ (donc de la forme $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, où G opère par translations à droite), *munis d'une donnée de descente relativement à* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. La donnée d'un point-base sur un fibré principal galoisien P sur S déployé par S′ revient, en termes du fibré trivial P′ correspondant sur S′ et de sa donnée de descente, à la donnée d'une trivialisation de $\mathrm{P}' \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{S}'_\xi$ compatible avec la donnée de descente induite, relativement à $\mathrm{S}'_\xi \to \xi$ (N. B. on a posé $\mathrm{S}'_\xi = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \xi$), i.e. une section σ de P'_ξ sur S'_ξ compatible avec la donnée de descente. Il y a alors intérêt, pour un S-préschéma *quelconque* S′ (pour lequel on ne suppose plus que $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ soit un morphisme de descente effective universelle pour la catégorie fibrée des fibrés constants tordus ...) de définir $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}; \mathrm{G})$ et $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$ comme l'ensemble des classes, à isomorphisme près, des structures avec données de descente qu'on vient de préciser. On obtient alors pour ces foncteurs en G une description simpliciale fort simple, en termes des carré et cube fibrés S″ et S‴ de S′ sur S, que nous allons esquisser plus bas (cf. 6.3).

109 La conclusion importante à retenir sera la suivante :

Proposition 6.1. — *Supposons que les composantes connexes de* S' *et* S'' *soient ouvertes, et, par exemple, que l'ensemble quotient de* $\pi_0(\mathrm{S}')$ *par la relation d'équivalence induite par les deux projections* $\pi_0(\mathrm{S}'') \to \pi_0(\mathrm{S}')$ *soit ponctuel.* (48)

(i) *Le foncteur* $\mathrm{G} \mapsto \pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$*, de la catégorie des groupes dans la catégorie des ensembles, est représentable par un groupe, noté* $\pi_1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi)$ *et appelé le* groupe fondamental de S en ξ relativement à $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *On a donc une bijection fonctorielle :*

$$\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\pi_1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi), \mathrm{G})\,.$$

(ii) *Ce groupe a un ensemble de générateurs en bijection avec* $\pi_0(\mathrm{S}'')$*, et est décrit en termes de ces générateurs par des relations en bijection avec les éléments de* $\pi_0(\mathrm{S}''')$ (49). *En particulier,* $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi)$ *est à engendrement fini* (*resp. de présentation finie*) *si* $\pi_0(\mathrm{S}'')$ (*resp. ainsi que* $\pi_0(\mathrm{S}'')$) *est fini.*

(iii) *La catégorie des fibrés principaux galoisiens sur* S *déployés par* S'*, avec point-base au-dessus de* ξ*, est équivalente à la catégorie des groupes ordinaires* G*, munis d'un homomorphisme de* $\pi_1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi)$ *dans* G.

La démonstration est donnée plus bas, cf. . . .

6.2. Lorsque S est un préschéma connexe *localement noethérien*, ce qui implique que tout préschéma étale S' sur S est localement noethérien donc a ses composantes connexes ouvertes, on conclut de ce qui précède (50) que le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$, de la catégorie des groupes ordinaires dans la catégorie des ensembles, est *strictement pro-représentable* (cf. Séminaire Bourbaki, Février 1960, N° 195, §§ A.2 et A. 3), i.e. il existe un système projectif

$$\Pi = \Pi_1(\mathrm{S}; \xi) = (\pi_i)_{i \in \mathrm{I}}$$

de groupes ordinaires sur un ensemble d'indices I filtrant croissant, qui soit « strict » **110**
(i.e. à morphismes de transition $\pi_j \to \pi_i$ *surjectifs*), et un isomorphisme de foncteurs en G

$$\pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G}) \simeq \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\pi_i, \mathrm{G})\,.$$

Le deuxième membre est aussi simplement noté $\mathrm{Hom}_{\text{pro-gr.}}(\Pi, \mathrm{G})$ (cf. *loc. cit.*).

Dans le cas où la limite projective $\pi = \varprojlim \pi_i$ est « assez grande », de façon précise lorsque les homomorphismes canoniques $\Pi \to \Pi_i$ sont *surjectifs*, il y a lieu de munir

(48) N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que les composantes connexes de S' soient ouvertes, ainsi que la seconde hypothèse. Cette dernière signifie que l'ensemble simplicial $\mathrm{K}_\bullet = \pi_0(\mathrm{S}_\bullet)$ défini en 6.3 est connexe ; il suffit en fait d'une hypothèse plus faible, à savoir que le *cône* $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$ d'un certain morphisme d'ensembles simpliciaux $k_\bullet \to \mathrm{K}_\bullet$ soit connexe (cf. *loc. cit.*).

(49) N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse, superflue, que les composantes connexes de S''' soient ouvertes. D'autre part, la description donnée plus loin (cf. . . .) donne comme ensemble naturel de générateurs l'ensemble $\pi_0(\mathrm{S}'') \amalg \pi_0(\mathrm{S}'_\xi)$; on se ramène ensuite à $\pi_0(\mathrm{S}'')$ au moyen des relations entre ces générateurs provenant des 2-cellules. Voir par exemple [**Kan58**], § 19 pour une description plus fine.

(50) N.D.E. : On pourrait détailler cette déduction ; I est en bijection avec un ensemble cofinal de morphismes $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ couvrants pour la topologie étale . . .

Π de la topologie limite projective des topologies discrètes des Π_i, et l'isomorphisme précédent s'écrit aussi :

$$\pi^1(\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.\,top.}}(\pi, \mathrm{G})\,,$$

où le deuxième membre désigne l'ensemble des homomorphismes de *groupes topologiques*, étant entendu que G est muni de la topologie discrète.

L'hypothèse qu'on vient de formuler sur le système projectif Π est vérifiée, comme il est bien connu, lorsque les π_i sont des groupes *finis* (cf. [**BEns**], III § 7.4, Th. 1). Cette dernière condition signifie évidemment aussi que tout fibré principal galoisien sur S est *isotrivial*, i.e. est déployé par un morphisme étale surjectif *fini.* C'est le cas lorsque S est géométriquement unibranche (par exemple normal) comme il résulte aussitôt de 5.14. [(51)] Dans le cas où les π_i sont finis, le groupe π coïncide aussi avec le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{S}, \xi)$ introduit dans SGA 1, V.

Aussi, dans le cas favorable ($\pi \to \pi_i$ surjectifs) on pourrait appeler π le *groupe fondamental élargi* de S en ξ. En dehors de ce cas favorable, π lui-même ne présente guère d'intérêt, et le rôle du groupe fondamental habituel est joué par le système projectif Π lui-même, qu'on appellera le *pro-groupe fondamental élargi de* S *en* ξ. (Toute suggestion terminologique meilleure que « élargi » est bienvenue ! [(52)]). On notera que la connaissance de ce pro-groupe est plus précise que celle du groupe fondamental habituel $\pi_1(\mathrm{S}, \xi)$ de SGA 1 V ; de façon précise ce dernier est la limite projective du système projectif formé des *quotients finis des* π_i.

111 **6.3.** Indiquons rapidement le « calcul » de $\pi_1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi)$. Soit S_i la puissance fibrée $(i+1)$-ème de S' sur S (i.e. $\mathrm{S}_0 = \mathrm{S}'$, $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}''$, etc.). On a entre les S_i des opérations simpliciales évidentes, qui font de $(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un *objet simplicial de* $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$.

Transformant cet objet simplicial par le foncteur « ensemble des composantes connexes »

$$\pi_0 : (\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}} \longrightarrow (\mathbf{Ens})\,,$$

on trouve un ensemble simplicial $\mathrm{K}_\bullet = (\mathrm{K}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, avec $\mathrm{K}_i = \pi_0(\mathrm{S}_i)$.

De même, les $\mathrm{S}_{i\,\xi}$ (= puissance fibrée $(i+1)$-ème de S'_ξ sur ξ) forment un objet simplicial de $(\mathbf{Sch})_{/\xi}$ donc de $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$, d'ailleurs muni d'un homomorphisme naturel d'objets simpliciaux dans $(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, d'où un ensemble simplicial $k_\bullet$ (avec $k_i = \pi_0(\mathrm{S}_{i\,\xi})$) et un homomorphisme canonique

$$k_\bullet \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet\,.$$

Nous pouvons former un nouvel ensemble simplicial en prenant le cône de ce morphisme (cf. 9.5.1) :

$$\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet = \mathrm{Cône}(k_\bullet \longrightarrow \mathrm{K}_\bullet).$$

(51) N.D.E. : On a corrigé 5.13 en 5.14.

(52) N.D.E. : Certains auteurs parlent du « *vrai* » groupe fondamental .

[53] De cette façon, on obtient un « ensemble simplicial pointé » $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$ (i.e. un ensemble simplicial muni d'un homomorphisme $\widetilde{\xi} : e_\bullet \to \widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$, où $e_\bullet$ est l'ensemble simplicial final). Nous pouvons en construire les invariants combinatoires bien connus $\pi_0(\widetilde{\mathrm{K}_\bullet}, \widetilde{\xi})$ et $\pi_1(\widetilde{\mathrm{K}_\bullet}, \widetilde{\xi})$, dont la construction ne fait intervenir d'ailleurs que les composantes de degré $\leqslant 1$ resp. de degré $\leqslant 2$. Ces invariants sont définis sans restriction sur S ni S$'$. On vérifie alors sans difficulté, lorsque les composantes connexes de S_0 et S_1 sont ouvertes et que $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$ est connexe, [54] que $\pi_1(\widetilde{\mathrm{K}_\bullet}, \widetilde{\xi})$ *représente* le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$, i.e. qu'on a :

$$\pi_1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}; \xi) \simeq \pi_1(\widetilde{\mathrm{K}_\bullet}, \widetilde{\xi})\,.$$

Signalons également que lorsque le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est « universellement sub- **112**
mersif » (cf. SGA 1, IV 2.1), et les composantes connexes de S$'$ ouvertes, alors [55] l'ensemble simplicial $\mathrm{K}_\bullet$, donc également $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$, est connexe.

Exemples 6.4. — Il reste à donner des exemples de groupes fondamentaux élargis. Reprenons les exemples de 1.6, c.-à-d., soient k un corps algébriquement clos, C_1 une courbe rationnelle complète sur k, ayant exactement un point singulier, ce point étant point double ordinaire, et C_2 une courbe réunion de deux composantes irréductibles, isomorphes à $\mathbb{P}^1_k$ et se coupant en exactement deux points, qui sont points doubles ordinaires de C_2. Dans l'un et l'autre cas, le groupe fondamental élargi de la courbe est isomorphe à $\mathbb{Z}$. [56]

De façon générale, il y aurait lieu de reprendre (en les simplifiant et rectifiant) les résultats de SGA 1 IX 5, dans le cadre du groupe fondamental élargi. Les exemples de *loc. cit.*, 5.5 donneraient autant d'exemples de pro-groupes fondamentaux élargis qui ne sont pas profinis. Ainsi, si au lieu d'un point double ordinaire, on prenait dans le premier exemple un point double à n branches distinctes, [57] on trouverait comme groupe fondamental élargi le groupe libre (*discret* !) à $n-1$ générateurs.

---

[53] N.D.E. : On a corrigé l'original, qui considère $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet = \mathrm{K}_\bullet/k_\bullet$ alors que d'une part $k_\bullet$ est déjà contractile (cf. 9.7.1) et d'autre part que le morphisme $k_\bullet \to \mathrm{K}_\bullet$ n'est en général pas injectif. C'est un épimorphisme si S$'$/S est étale fini (cf. 9.7.3).

[54] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que $\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet$ soit connexe ; pour la démonstration, voir l'addenda plus bas (section 9).

[55] N.D.E. : On a modifié la suite, en tenant compte de la correction effectuée plus haut, cf. N.D.E. (53).

(L'original était : « $\pi_0(\widetilde{\mathrm{K}}_\bullet, \widetilde{\xi})$ est aussi canoniquement isomorphe à l'ensemble $\pi_0(\mathrm{S}, \xi)$ des composantes connexes de S, pointé par la composante connexe de ξ dans S ».)

[56] N.D.E. : On pourrait détailler ceci : d'abord, tenant compte de 5.14, le groupe fondamental élargi de la droite projective $\mathbb{P}^1_k$ est nul, i.e. $\mathbb{P}^1_k$ est « vraiment » simplement connexe. Ensuite, il faudrait étendre au cas du groupe fondamental élargi et de la catégories des fibrés principaux (non nécessairement finis), le Corollaire 5.4 de SGA 1 IX et la discussion qui le suit. (Soient Γ_1 et Γ_2 deux copies de $\mathbb{P}_k$, a_i, b_i deux points distincts de Γ_i, C''_2 la réunion disjointe de Γ_1 et Γ_2, C'_2 la courbe obtenue en identifiant a_1 à a_2 ; alors C_2 s'obtient à partir de C'_2 en identifiant de plus b_1 à b_2. La discussion suivant *loc. cit.*, étendue au cas élargi, montre alors que le groupe fondamental élargi de C'_2 (resp. C_2) est nul (resp. $\mathbb{Z}$).

[57] N.D.E. : Il s'agit d'un point n-uple à n tangentes distinctes, par exemple la courbe $\mathrm{X}^n - \mathrm{Y}^n = \mathrm{X}^{n+1}$.

7. Classification des préschémas constants tordus et des groupes de type multiplicatif de type fini en termes du groupe fondamental élargi

7.0. Soit S un préschéma, que nous supposons encore *localement noethérien*, pour assurer que S et certains préschémas au-dessus de S que nous allons considérer
113 (notamment ceux étales sur S, plus généralement ceux qui sont localement de type fini sur S) sont *localement connexes*.

Proposition 7.0.1. — *Tout préschéma constant tordu* X *sur* S *qui est localement trivial pour la topologie* (fppf) (*i.e. qui est déployé par un morphisme fidèlement plat localement de présentation finie* $S' \to S$) *est* quasi-isotrivial (*i.e. on peut même choisir* $S' \to S$ *étale surjectif*).

En effet, on peut supposer S connexe, donc X de type I, où I est un ensemble fixe. Donc $X' = X \times_S S'$ est isomorphe à $I_{S'}$, donc $I_{S'}$ se trouve muni d'une donnée de descente relativement à $S' \to S$, i.e. on a un isomorphisme $I_{S''} \xrightarrow{\sim} I_{S''}$ satisfaisant à la condition habituelle de transitivité. Or, $S'' = S' \times_S S'$ est localement noethérien donc localement connexe, d'où résulte que les automorphismes de $I_{S''}$ correspondent aux sections de $G_{S''}$, où $G = \mathrm{Aut}(I)$ est le groupe des permutations de I.

De cette façon, on obtient une donnée de descente sur $G_{S'}$ (considéré comme fibré principal galoisien trivial) relativement à $S' \to S$. En vertu de 5.4 cette donnée de descente est effective, d'où un fibré principal galoisien P sur S, de groupe G. Par construction, il représente le foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}_S(I_S, X)$ dans la catégorie des préschémas au-dessus de S qui sont localement noethériens. Par suite, le changement de base étale surjectif $P \to S$ déploie X, donc X est bien quasi-isotrivial.

Remarque 7.0.2. — On fera attention que même si S est le spectre d'un corps, il n'est pas vrai en général que *tout* fibré constant tordu sur S soit quasi-isotrivial. Il suffit par exemple de prendre pour X le schéma somme d'une suite de schémas de la forme $\mathrm{Spec}(k_i)$, où les k_i sont des extensions séparables de k de degrés strictement croissants.

La démonstration donnée plus haut montre en même temps que la classification des fibrés constants tordus X sur S, quasi-isotriviaux et de type I, est équivalente à celle des fibrés principaux galoisiens sur S, de groupe $G = \mathrm{Aut}(I)$. C'est même là une *équivalence de catégories*.

Elle peut être mise sous une forme plus commode comme dans SGA 1 V. Pour
114 ceci, supposons S connexe, et muni d'un point géométrique ξ. Par suite le pro-groupe fondamental élargi $\Pi = \Pi_1(S, \xi)$ est défini. D'autre part, pour tout fibré constant tordu X quasi-isotrivial sur S, soit $I = X(\xi)$ sa fibre ensembliste en ξ. Donc X est de type I, et par suite associé comme on vient de dire à un fibré principal galoisien $P = \underline{\mathrm{Isom}}_S(I_S, X)$ sur S, de groupe $G = \mathrm{Aut}(I)$.

D'après la définition de Π, on obtient donc un homomorphisme canonique de Π dans G, i.e. d'un des Π_i dans G. Comme G est le groupe des permutations de $I = X(\xi)$, cela signifie que Π « opère continûment sur $I = X(\xi)$ », étant entendu par là que les π_i (i grand) opèrent sur I, de façon compatible avec les morphismes de transition.

Nous laissons au lecteur de vérifier que tout S-morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ entre fibrés constants tordus quasi-isotriviaux sur S induit une application $\mathrm{X}(\xi) \to \mathrm{Y}(\xi)$ *compatible* avec les opérations de Π, et que le foncteur ainsi obtenu est une *équivalence de catégories* :

Proposition 7.0.3. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien connexe*,* ξ *un point géométrique de* S*,* $\Pi = \Pi_1(\mathrm{S}, \xi)$ *le pro-groupe fondamental élargi de* S *en* ξ*. Alors le foncteur*

$$\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{X}(\xi)$$

est une équivalence *entre la catégorie des fibrés constants tordus quasi-isotriviaux sur* S *et la catégorie des ensembles où* Π *opère continûment.*

Ce foncteur est compatible avec les opérations de sommes finies et de $\varprojlim$ finies. Il s'ensuit par exemple que les groupes (ou anneaux etc.) constants tordus quasi-isotriviaux sur S correspondent aux groupes (resp. anneaux etc.) ordinaires sur lesquels le pro-groupe Π opère continûment. En particulier :

Corollaire 7.0.4. — *La catégorie des groupes commutatifs constants tordus quasi-isotriviaux sur* S *est* équivalente *à la catégorie des « Π-modules » i.e. des groupes commutatifs* M *dans lesquels* Π *opère continûment.*

Utilisant maintenant 5.7 on en conclut le :

Théorème 7.1. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien connexe*,* ξ *un point géométrique de* S*,* $\Pi = \Pi_1(\mathrm{S}, \xi)$ *le pro-groupe fondamental élargi de* S *en* ξ*. Alors le foncteur*

$$\mathrm{G} \longmapsto \mathrm{Hom}_{\kappa(\xi)\text{-gr.}}(\mathrm{G}_\xi, \mathbb{G}_{m,\xi})$$

induit une anti-équivalence *de la catégorie des groupes* de type multiplicatif quasi- 115
isotriviaux *sur* S *avec la catégorie des* Π*-modules.*

Utilisant 4.5 on en conclut :

Corollaire 7.2. — *Le foncteur précédent induit une* anti-équivalence *de la catégorie des groupes* de type multiplicatif et de type fini *sur* S*, et de la catégorie des* Π-modules *qui sont* de type fini sur $\mathbb{Z}$*.*

Exemple 7.3. — Reprenons par exemple pour S une courbe rationnelle complète sur un corps algébriquement clos, ayant exactement un point multiple à $n+1$ branches distinctes. D'après 6.4, le groupe fondamental élargi $\Pi(\mathrm{S}, \xi)$ est un groupe libre à n générateurs. Donc, d'après 7.2, la classification des *tores de dimension relative* m sur S est équivalente à la classification des systèmes de n endomorphismes $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^m$, à automorphisme de $\mathbb{Z}^m$ près. Sauf pour $n \leqslant 1$ ou $m \leqslant 1$, une classification explicite de tels systèmes semble sans espoir. On peut du moins définir une foule d'invariants non triviaux pour un tel système, tels les polynômes caractéristiques des A_i. [58]

[58] N.D.E. : En particulier, ceci montre que les tores de dimension relative 2 considérés en 1.6 sont non isotriviaux.

Remarque 7.4. — Si on ne fait aucune hypothèse sur S, il reste vrai que pour un groupe commutatif ordinaire M de type fini sur $\mathbb{Z}$ donné, la catégorie des groupes de type multiplicatif de type M sur S est anti-équivalente à la catégorie des fibrés principaux galoisiens sur S, de groupe $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{M})$. Cela résulte facilement de 5.9 et 5.10.

Remarque 7.5. — La théorie du pro-groupe fondamental que nous avons esquissée dans les deux présents numéros s'écrira avantageusement dans le cadre des sites généraux. Sous cette forme, elle s'applique également, par exemple, aux espaces topologiques ordinaires, et donne une théorie satisfaisante du moins pour un espace topologique localement connexe (pas nécessairement localement simplement connexe). Dans ce cas également il semble qu'on ne peut se contenter de définir un groupe fondamental, et qu'il faut un pro-groupe. Enfin, remarquons que, une fois qu'on dispose du langage des topologies et de la descente (qui est vraiment au fond de ces questions), l'exposé esquissé ici est aussi techniquement plus simple que celui de SGA 1 V, et devrait donc en principe s'y substituer.

8. Appendice : Élimination de certaines hypothèses affines

116 Notre objet est de prouver la généralisation suivante de 4.9.

Théorème 8.1. — *Soient* S *un préschéma,* H *un* S*-préschéma en groupes* plat et de présentation finie*, à fibres* connexes et affines [59]*. Soit* $s \in \mathrm{S}$*, on suppose que* H_s *est un tore. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *tel que* $\mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ *soit un tore.*

On en conclut immédiatement :

Corollaire 8.2. — *Soit* H *un* S*-préschéma en groupes,* plat et de présentation finie *sur* S*. Pour que* H *soit un tore, il faut et il suffit que ses fibres soient des tores.*

Remarque 8.3. — Même lorsque S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, on ne peut dans 8.1 abandonner l'hypothèse que les fibres de H (ici la fibre générique) soient affines, car il y a des exemples de groupes lisses sur S, dont la fibre générique est une courbe elliptique, et la fibre spéciale est $\mathbb{G}_m$.

Démonstration de 8.1. On peut supposer évidemment $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ affine, ce qui nous ramène par le procédé standard (cf. EGA IV_2, 8.8.2) au cas où S est de plus noethérien. Nous commençons par prouver 8.2 dans ce cas.

En vertu de 4.9 on est ramené à prouver que H est affine sur S. On peut donc supposer [60] A noethérien *local*, et comme le complété $\widehat{\mathrm{A}}$ est fidèlement plat sur A, on est ramené par descente au cas où A est un anneau noethérien local *complet.* Soit S' le normalisé de $\mathrm{S}_{\mathrm{réd}}$, on sait par Nagata qu'il est fini sur S (EGA 0_{IV}, 23 1.5) ; de plus $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est surjectif, donc $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \to \mathrm{H}$ est fini et surjectif, donc pour prouver que H est affine, il suffit de montrer qu'il en est ainsi de H' (EGA II, 6.7.1).

[59] N.D.E. : Noter que les hypothèses entraînent que H est *séparé* sur S, d'après VI_{B}, Th. 5.3 ou Cor. 5.5.
[60] N.D.E. : par EGA IV_2, 8.8.2 à nouveau

[61] Remplaçant S par une composante connexe de S′, ceci nous ramène au cas où A est un anneau noethérien (semi-local) *normal et intègre*. De plus, quitte à remplacer A par son normalisé dans une extension finie séparable de son corps des fractions, 117
on peut supposer que la fibre générique H_η de H est diagonalisable, i.e. qu'on a un isomorphisme

$$u_\eta : H_\eta \xrightarrow{\sim} T_\eta,$$

où $T = \mathbb{G}_{m,S}^r$. Or on a le

Lemme 8.4. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien normal et irréductible*, de point générique* η*,* H *un préschéma en groupes sur* S lisse et à fibres connexes*,* T *un préschéma en groupes* de type multiplicatif et de type fini *sur* S*,* $u_\eta : H_\eta \to T_\eta$ *un homomorphisme de groupes algébriques sur* $\kappa(\eta)$*.*

Alors u_η *se prolonge en un homomorphisme de groupes* $u : H \to T$*.*

Quitte à remplacer S par son normalisé dans une extension finie séparable de son corps des fonctions, on peut supposer T diagonalisable (ce qui est d'ailleurs le cas dans l'application que nous avons en vue). Alors T est un sous-groupe fermé d'un groupe de la forme $\mathbb{G}_{m,S}^r$, ce qui nous ramène au cas où $T = \mathbb{G}_{m,S}$.

Tout revient à prouver que u_η, considérée comme une application rationnelle de H dans $T = \mathbb{G}_{m,S}$, est partout définie (car le morphisme $u : H \to T$ qui la prolonge est alors nécessairement un homomorphisme de groupes). On peut considérer u_η comme une section inversible f du faisceau structural de H_η, et il faut montrer qu'elle se prolonge en une section inversible du faisceau structural de H. Or H, étant lisse sur S normal, est normal (SGA 1, II 3.1), donc il suffit de trouver une partie fermée Z de H de codimension $\geqslant 2$ telle que f se prolonge en une section inversible du faisceau structural de $H - Z$. Cela nous ramène aussitôt au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A (en localisant aux points de codimension 1 de S).

Soit t une uniformisante de A, t' la section de $\mathscr{O}_H$ qu'elle définit, de sorte que la fibre spéciale H_0 est égale à $\mathscr{V}(t')$. Par hypothèse H_0 est lisse sur le corps résiduel k, et connexe. Alors f est une fonction rationnelle sur H qui n'a ni zéros ni pôles dans $H - H_0$; comme $H_0 = \mathscr{V}(t')$ est un diviseur irréductible, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t'^n f = t^n f$ n'ait pas de zéros ni de pôles, i.e. soit une section inversible de 118
$\mathscr{O}_H$. Elle définit donc un morphisme $v : H \to \mathbb{G}_{m,S}$, et comme $v_\eta = t'^n u_\eta$ et u_η est un homomorphisme de groupes, v transforme la section unité de H en une section de $\mathbb{G}_{m,S}$ dont la valeur au point générique de S est t^n ; comme il s'agit d'une section de $\mathbb{G}_{m,S}$, il faut que t^n soit une unité, i.e. $n = 0$, donc v prolonge u_η, ce qui achève de prouver 8.4.

Appliquant ce lemme au cas actuel, on trouve un homomorphisme de groupes

$$u : H \longrightarrow T = \mathbb{G}_{m,S}^r$$

qui induit sur les fibres génériques un isomorphisme. Prouvons que u est un isomorphisme.

[61] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Lemme 8.5. — *Pour tout entier $n > 0$ premier à la caractéristique résiduelle de* A*,* ${}_n\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}})$ *est fini sur* S.

Si n est premier à la caractéristique résiduelle de A, il est premier à toutes les caractéristiques résiduelles des points de S. Donc $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$ induit sur toute fibre de H un morphisme étale, par suite $n \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$ est étale (SGA 1, I 5.9), donc son noyau ${}_n\mathrm{H}$ est étale sur S. D'autre part, ${}_n\mathrm{H}$ est séparé sur S puisque H l'est [*] [62]. De plus, toutes ses fibres ont même rang n^r, puisque les fibres de H sont des tores, tous de même dimension r (H étant lisse sur S). On en conclut que ${}_n\mathrm{H}$ est fini sur S (SGA 1, I 10.9 ou EGA IV_4, 18.2.9).

Donc, d'après le lemme précédent, $u({}_n\mathrm{H})$ est une partie fermée de T. Comme sur la fibre générique T_η, cette partie est identique à ${}_n(\mathrm{T}_\eta)$, il s'ensuit qu'elle contient l'adhérence de cette partie, savoir ${}_n\mathrm{T}$. Or pour tout $s \in \mathrm{S}$, les ${}_n(\mathrm{T}_s)$ sont denses dans T_s ; comme $u_s(\mathrm{H}_s)$ est une partie *fermée* (VI_{B} 1.4.2) les contenant, on voit que $u_s(\mathrm{H}_s) = \mathrm{T}_s$, donc u est surjectif. Comme un homomorphisme surjectif de tores de même dimension sur un corps est plat [63], il s'ensuit que u induit sur chaque fibre un morphisme plat, donc u est plat (SGA 1 I 5.9). Par suite, $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(u)$ est plat sur S, [64] donc égal à l'adhérence de sa fibre générique K_η. Or K_η est le groupe groupe
119 unité par construction, et comme K est séparé sur S (puisque H l'est), sa section unité est fermée, d'où il s'ensuit que K est le groupe unité. Donc u est un monomorphisme ; comme on a vu qu'il est fidèlement plat, c'est donc un isomorphisme (cf. SGA 1, I 5.1 ou EGA IV_4, 17.9.1). Cela prouve que H est un tore, donc achève la démonstration de 8.2. [65]

Remarque 8.5.1. — Au lieu d'invoquer 8.5 on peut aussi invoquer le « Main Theorem » de Zariski, qui implique directement que u est une immersion ouverte, donc un isomorphisme. [66]

Pour prouver 8.1, on est ramené grâce au théorème de quasi-isotrivialité au cas où S est local, s son point fermé, [67] et à prouver qu'avec les hypothèses faites par ailleurs, H est alors un tore. En vertu de 8.2 déjà prouvé, on est ramené à prouver que les fibres de H sont des tores. On peut supposer S spectre d'un anneau local noethérien *complet* A. En vertu de 3.3 il existe pour tout $n > 0$ un groupe de type multiplicatif T_n fini sur S, et un isomorphisme $(\mathrm{T}_n)_s \simeq {}_n(\mathrm{H}_s)$, où s est le point fermé

[*] En vertu du th. de Raynaud VI_{B} 5.3.

[62] N.D.E. : Détailler ce point, en liaison avec les modifications dans VI_{B} § 5.

[63] N.D.E. : Ceci résulte, par exemple, de VIII 3.2 a) ; plus généralement, si $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est un morphisme surjectif de groupes algébriques sur un corps k et si H est *réduit*, alors f est plat (cf. VI_{B} 1.3).

[64] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[65] N.D.E. : Au moins dans le cas envisagé jusqu'ici, à savoir S localement noethérien.

[66] N.D.E. : Les éditeurs n'ont pas compris cette remarque, ne comprenant pas pourquoi u serait *a priori* à fibres finies et surjectif . . .

[67] N.D.E. : Détailler cette réduction . . .

de S. Procédant comme dans 3.1 et utilisant le fait que T_n est *fini* sur S, [68] on voit que l'isomorphisme précédent provient d'un homomorphisme $u_n : \mathrm{T}_n \to \mathrm{H}$, d'ailleurs uniquement déterminé. (Passer à la limite sur les quotients artiniens de A).

De plus, en vertu des propriétés d'unicité, $u_n : \mathrm{T}_n \to \mathrm{H}$ se déduit de $u_m : \mathrm{T}_m \to \mathrm{H}$ par restriction à ${}_n(\mathrm{T}_m) \simeq \mathrm{T}_n$ lorsque m est un multiple de n. Il résulte de IX, 6.6 que les u_n sont des monomorphismes, donc les T_n sont des sous-groupes de H, et pour m multiple de n, on a $\mathrm{T}_n = {}_n(\mathrm{T}_m)$.

Donc pour tout $t \in \mathrm{S}$, les $(\mathrm{T}_n)_t$ sont des sous-groupes de H_t, de type $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$ (où $r = \dim \mathrm{H}_s = \dim \mathrm{H}_t$), tels que pour m multiple de n, on ait $(\mathrm{T}_n)_t = {}_n(\mathrm{T}_m)_t$. Le fait que H_t soit un tore résulte maintenant du

Lemme 8.6. — *Soient* H *un groupe algébrique* affine lisse *sur un corps algébriquement clos k,* $(\mathrm{T}_n)_{n>0}$ *une famille de sous-groupes de* type multiplicatif *de* H*, telle que pour tout entier $n > 0$,* T_n *soit de type* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$*, et pour tout multiple m de n, on ait* $\mathrm{T}_n = {}_n(\mathrm{T}_m)$.

Sous ces conditions, H *contient un tore de dimension $\geqslant r$ contenant les* T_n*, donc si* H *est connexe de dimension $\leqslant r$,* H *est un tore de dimension r.* 120

Il s'agit d'un exercice de groupes algébriques affines, que nous allons traiter à coups de références à *Bible*. Nous nous bornons à considérer les T_n pour n premier à la caractéristique. Soit K l'adhérence de la réunion des T_n dans H, muni de la structure réduite induite, alors des raisonnements standard montrent que K est un sous-groupe algébrique commutatif de H. En vertu de *Bible*, § 4.5, th. 4, K est donc isomorphe à un produit $\mathrm{K}_u \times \mathrm{K}_s$, avec K_u « unipotent » et K_s diagonalisable. Tout sous-groupe diagonalisable de K est contenu dans K_s, donc les T_n sont des sous-groupes de K_s, donc $\mathrm{K} = \mathrm{K}_s$. Écrivons $\mathrm{K} = \mathrm{D}(\mathrm{M})$, avec M un groupe commutatif ordinaire, de type fini sur $\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{T}_n \subseteq \mathrm{K}$ signifie que M admet un groupe quotient isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$. Ceci étant vrai pour tout entier n premier à la caractéristique de k (il suffirait, pour les puissances d'un nombre premier fixé) il s'ensuit que M est de rang $\geqslant r$, donc K contient un tore de dimension r, soit T. Lorsque H est connexe de dimension r, il s'ensuit $\mathrm{T} = \mathrm{H}$, ce qui achève la démonstration de 8.6. Ainsi 8.1 est démontré.

Remarques 8.7. — Utilisant 8.1, il ne devrait pas être difficile de donner des généralisations analogues de 4.7 et 4.8. Une étude plus intéressante serait celle de la situation 8.1 où on abandonnerait l'hypothèse que les fibres de H soient affines. On peut montrer qu'il existe alors un voisinage ouvert U de s tel que $\mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ soit commutatif et que pour tout $t \in \mathrm{U}$, la fibre géométrique $\mathrm{H}_{\overline{t}}$ est une extension d'une variété abélienne par un tore. [69] Bien entendu, dans des questions de ce genre, on peut se borner au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, s son point fermé, t son point générique.

On peut généraliser ce résultat de la façon suivante. Pour tout groupe algébrique G connexe lisse sur un corps algébriquement clos k, un théorème bien connu de Chevalley

[68] N.D.E. : Détailler ce point ...

[69] N.D.E. : Donner une référence ici ?

121 nous dit que G est (de façon unique) extension d'une variété abélienne A par un groupe affine lisse connexe V. Désignons par *rang abélien* (resp. *rang réductif*, resp. *rang nilpotent*, resp. *dimension semi-simple*) de G, et notons $\rho_{\mathrm{ab}}(\mathrm{G})$ (resp. $\rho_r(\mathrm{G})$, resp. $\rho_n(\mathrm{G})$, resp. $d_s(\mathrm{G})$) la dimension de A, resp. la dimension des tores maximaux de G, resp. la dimension des sous-groupes de Cartan [70] de G, resp. la dimension du quotient de G (ou encore de V), par son radical, (cf. *Bible* pour toutes ces notions). Introduisons aussi le rang unipotent $\rho_u(\mathrm{G}) = \rho_u(\mathrm{V}) = \rho_n(\mathrm{G}) - \rho_r(\mathrm{G}) - \rho_{ab}(\mathrm{G})$. Lorsque G n'est pas algébriquement clos, nous désignons encore par les mêmes noms et les mêmes notations les invariants correspondants pour $\mathrm{G}_{\overline{k}}$, où $\overline{k}$ est la clôture algébrique de k.

Ceci posé, soit G un schéma en groupes lisse sur le spectre S d'un anneau de valuation discrète, soient ρ_{ab} etc. (resp. ρ'_{ab} etc.) les invariants associés à la fibre spéciale (resp. à la fibre générique), alors on a les inégalités :

$$\begin{cases} \rho_{\mathrm{ab}} \leqslant \rho'_{\mathrm{ab}} \\ \rho_r + \rho_{\mathrm{ab}} \leqslant \rho'_r + \rho'_{\mathrm{ab}} \\ d_s \leqslant d'_s \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_n \geqslant \rho'_n \\ \rho_u \geqslant \rho'_u. \end{cases}$$

Il revient au même de dire qui si G est lisse de type fini sur une base quelconque S, les fonctions $s \mapsto \rho_{\mathrm{ab}}(s)$, $\rho_{\mathrm{ab}}(s) + \rho_r(s)$, $d_s(s)$ sont semi-continues inférieurement, les fonctions $s \mapsto \rho_n(s)$, $\rho_u(s)$ sont semi-continues supérieurement. [71]

Les mêmes résultats valent probablement encore sans supposer G lisse sur S, mais simplement plat de présentation finie sur S, en convenant de désigner, pour un groupe algébrique G sur un corps algébriquement clos k, par $\rho_{\mathrm{ab}}(\mathrm{G})$ etc. les invariants correspondants de $\mathrm{G}^0_{\mathrm{réd}}$.

Dans ce Séminaire, nous présentons quelques résultats de ce type pour G affine sur
122 S, ou plus généralement à fibres affines : dans ce cas, nous vérifierons les propriétés de semi-continuité pour ρ_r, ρ_n donc pour $\rho_u = \rho_n - \rho_r$, et la continuité de ρ_s au voisinage d'un point s dont la fibre est un groupe réductif. [71]

On peut généraliser 8.2 lorsqu'on suppose déjà G commutatif, de la façon suivante :

Théorème 8.8. — [72] *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes commutatif, qui soit plat et de présentation finie sur* S*, à fibres affines connexes. Soit* $s \in \mathrm{S}$*, et supposons que*

a) *si* $\overline{k}$ *désigne une clôture algébrique de* $\kappa(s)$*,* $(\mathrm{G}_{\overline{k}})_{\mathrm{réd}}$ *est un tore.*

b) *Il existe une générisation* t *de* s *telle que* G_t *soit lisse sur* $\kappa(t)$*.*

Sous ces conditions, il existe un voisinage ouvert U *de* s*, tel que* G|U *soit un tore.*

(Noter d'ailleurs que si on suppose seulement que pour toute générisation t de s, G_t est affine resp. connexe, on en tire facilement que la même conclusion est valable pour t dans un voisinage ouvert de s).

---

(70) N.D.E. : Rappeler la définition de « sous-groupe de Cartan » ...

(71) N.D.E. : Donner une référence pour ces résultats ?

(72) N.D.E. : G. Prasad et J.-K. Yu ont généralisé (moyennant quelques hypothèses additionnelles) ce résultat en ne supposant pas G commutatif et en remplaçant dans l'hypothèse a) et la conclusion « tore » par « groupe réductif », cf. [PY06], Th. 6.2.

Démonstration de 8.8. Il suffit de prouver que G_s est lisse sur $\kappa(s)$. En effet, comme G est plat de présentation finie sur S, il s'ensuit alors que G est lisse sur S au-dessus d'un voisinage de s (cf. 3.5), mais alors on est sous les conditions de 8.1.

Pour prouver que G_s est lisse sur $\kappa(s)$, le procédé habituel nous ramène au cas où S est affine noethérien. Choisissant un homomorphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ d'un spectre d'anneau de valuation discrète S' dans S, qui envoie le point fermé en s et le point générique η en t, on est ramené au cas où S est lui-même le spectre d'un anneau de valuation discrète, qu'on peut supposer de plus complet à corps résiduel algébriquement clos, et où s et $t = \eta$ sont respectivement le point fermé et le point générique de S.

Donc G est plat, séparé, de type fini sur S, la fibre générique G_η est lisse et connexe, **123**
et la fibre spéciale G_0 est telle que $\mathrm{T}_0 = (\mathrm{G}_0)_{\text{réd}}$ soit un tore. Soit m un entier > 0 premier à la caractéristique résiduelle en s, donc aussi à celle en η, on sait alors que $m \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ est un morphisme étale fibre par fibre ($\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 8.4), donc un morphisme étale puisque G est plat sur S (SGA 1 I 5.9), donc son noyau ${}_m\mathrm{G}$ est étale sur S, et comme G est séparé (*) (73) de type fini sur S, il en est de même de ${}_m\mathrm{G}$. Comme $({}_m\mathrm{G})_0 = {}_m(\mathrm{T}_0)$, son degré est m^r, où $r = \dim \mathrm{T}_0 = \dim \mathrm{G}_0 = \dim \mathrm{G}$. Il s'ensuit que le rang de $({}_m\mathrm{G})_\eta = {}_m(\mathrm{G}_\eta)$ est $\geqslant m^r$, ce qui prouve déjà (en utilisant 8.6) que G_η est un tore de dimension r, puisque les deux fibres de ${}_m\mathrm{G}$ ont même rang, donc comme dans 8.5 que ${}_m\mathrm{G}$ est fini sur S. (74)

Noter que puisque S est complet à corps résiduel algébriquement clos, le revêtement fini étale ${}_m\mathrm{G}$ se décompose complètement, donc par tout point de ${}_m\mathrm{G}_0$ passe une section de G sur S, en particulier l'ensemble des points de G_0 par lesquels passe une section de G sur S est partout dense. Or on a ceci :

Lemme 8.9. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien régulier de dimension 1*,* G *un* S*-préschéma en groupes* plat et localement de type fini*, tel que* G_η *soit* lisse *sur* $\kappa(\eta)$ *pour tout point maximal* η *de* S (*ce qui implique que* G *est* réduit)*. Supposons que le schéma normalisé* X *de* G *soit* fini *sur* G (*c'est le cas, d'après Nagata, si* S *est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet,* cf. EGA IV_2, 7.7.4)*, et soit* G' *l'ouvert de* X *formé des points en lesquels* X *est* lisse sur S*. Avec ces notations :*

a) *Si la projection* $\mathrm{G}' \to \mathrm{S}$ *est surjective, alors il existe sur* G' *une unique structure de* S*-préschéma en groupes, telle que le morphisme canonique* $\mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ *soit un homomorphisme de groupes.*

b) *Supposons que pour tout point fermé* s *de* S*, l'ensemble des points de* G^0_s *par lesquels passe une quasi-section étale soit dense dans* G^0_s *pour la topologie de Zariski. Alors* X *est régulier, on est sous les conditions de* a)*, et l'application* $\Gamma(\mathrm{G}'/\mathrm{S}) \to$ **124**
$\Gamma(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ *est bijective.*

Dans le cas qui nous intéresse, ce lemme s'applique et nous donne un homomorphisme de groupes $u : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$, où G' est lisse sur S, et où u_η est un isomorphisme

(*) En vertu du th. de Raynaud VI_{B} 5.3.

(73) N.D.E. : cf. la N.D.E. (62) dans 8.5.

(74) N.D.E. : revoir la phrase précédente . . .

$\mathrm{G}'_\eta \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}_\eta$. Quitte à remplacer G' par un sous-groupe ouvert, on peut supposer que G'_0 est connexe, et comme $u_0 : \mathrm{G}'_0 \to \mathrm{G}_0$ induit un morphisme surjectif $\mathrm{G}'_0 \to \mathrm{T}_0$, où T_0 est un tore de même dimension que G'_0, on conclut facilement que G'_0 est un tore (par exemple en utilisant 8.6, ou en référant à *Bible*, § 7.3, th. 3 a)). Par suite, en vertu de 8.2 G' est un tore, mais alors en vertu de IX 6.8, $\mathrm{Ker}\, u$ est un sous-groupe de type multiplicatif de G', et comme sa fibre générique est réduite au groupe unité, c'est le groupe unité, donc u est un *monomorphisme*. Utilisant maintenant VIII 7.9 il s'ensuit que u est une *immersion*. Étant surjective, et G étant réduit, il s'ensuit que u est un isomorphisme, ce qui achève de prouver 8.8.

Reste à prouver 8.9. Pour prouver a), notons que l'unicité de la loi de groupe sur G' rendant $u : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ un homomorphisme de groupes est claire, puisqu'on connaît la loi de groupe de G' sur la fibre générique (supposant S irréductible, ce qui est loisible). Pour l'existence, on se ramène aisément au cas où S est local, spectre d'un anneau de valuation discrète A, et grâce à l'unicité, et du fait que l'opération de clôture intégrale commute à une extension étale de la base, on peut faire sur S des extensions étales de la base, ce qui nous ramène au cas où A est « strictement local » i.e. hensélien et à corps résiduel séparablement clos La même réduction s'applique pour b), mais dans l'hypothèse faite dans b), on peut maintenant remplacer « quasi-section étale » par « section ».

Notons que G' étant lisse sur S et X normal, $\mathrm{G}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est normal (car lisse sur X qui est normal), donc le morphisme composé $\mathrm{G}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ se factorise en

$$p : \mathrm{G}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}.$$

125 Prouvons que ce dernier morphisme induit sur l'ouvert $\mathrm{G}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}'$ de $\mathrm{G}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ un morphisme

$$\mathrm{G}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{G}'.$$

Il faut donc montrer que $\mathrm{G}'_0 \times_k \mathrm{G}'_0$ est appliqué dans l'ouvert G'_0 de X_0, il suffit de voir que pour tout point g'_0 de G'_0 à valeurs dans k, le morphisme

$$h'_0 \longmapsto p_0(g'_0, h'_0) \qquad \text{(x)}$$

de G'_0 dans X_0 est à valeurs dans G'_0. Or comme G' est lisse sur S et S est hensélien, tout g'_0 comme dessus est induit par une section g' de G' sur S, et on constate tout de suite que le morphisme (x) ci-dessus est alors induit par le morphisme $h' \mapsto p(g', h')$ de G' dans X, lui-même déduit par transport de structure de l'automorphisme $h \mapsto g \cdot h$ de G, translation à gauche par la section g de G image de g'. Donc $h' \mapsto p(g', h')$ est lui-même un *automorphisme* de X, donc applique G' dans G', ce qui prouve notre assertion.

Reste à prouver que la loi de composition ainsi obtenue dans G' est une loi de groupe. L'associativité résulte aussitôt de l'associativité de la fibre générique (isomorphe à celle de G). D'autre part, l'automorphisme de symétrie du S-préschéma G induit un automorphisme de X, qui laisse donc G' stable et induit un automorphisme σ de G'. On constate alors que ce dernier a les propriétés d'un inverse pour la loi de composition sur G', car cela revient encore à la vérification de la commutativité de certains diagrammes faisant intervenir des puissances fibrées de G' sur S, et celles-ci étant lisses sur S, il suffit d'en vérifier la commutativité sur la fibre générique, ce qui est clair. Cela prouve la partie a) de 8.9.

Prouvons b). Soit Z' l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathscr{O}_{X,x}$ soit non régulier, c'est une partie fermée en vertu d'un théorème de Nagata (EGA IV_2, 6.12.6), évidemment 126
contenue dans X_0, soit Z son image dans G, qui est donc une partie fermée de G_0. Alors Z est une *partie rare* de G_0, i.e. ne contient aucun point maximal y de G_0. En effet, comme G_0 est défini dans G par une équation $t = 0$ (où t est une uniformisante de l'anneau de valuation discrète A), $\mathscr{O}_{G,y}$ est de dimension 1 par le Hauptidealsatz, donc pour tout x de X au-dessus de y, $\mathscr{O}_{X,x}$ est de dimension 1, donc un anneau de valuation discrète puisque X est normal donc régulier en codimension 1. D'autre part, il est évident que pour toute section g de G sur S, Z' est stable sous l'automorphisme de X défini par transport de structure à partir de la translation à gauche par g dans G, donc Z est stable par la translation à gauche dans G_0 définie par g_0. Or par hypothèse l'ensemble de ces g_0 est dense dans G_0^0. Comme Z est stable par translation par ces g_0, et est un fermé rare, il s'ensuit aussitôt que $Z = \varnothing$, d'où $Z' = \varnothing$, donc X est *régulier*. Par suite, X *est lisse sur* S *en tout point par lequel passe une section.* Or toute section de G sur S se relève de façon unique en une section de X sur S donc de G' sur S. Il en est ainsi en particulier de la section unité, ce qui prouve que l'image de G' dans S est S i.e. qu'on est sous les conditions de (a). Cela achève la démonstration de 8.9 donc de 8.8.

9. Addenda

(75)

9.1. Ensembles simpliciaux, topos, groupoïdes, et espaces topologiques. —

Notations 9.1.1. — (1) Soit E un ensemble simplicial. On peut lui associer les objets suivants :

(2) un topos $T = E^{\sim}$, obtenu à partir des topos naturellement associés aux ensembles E_i, suivant le procédé décrit en [**Del74**], 6.3.1 (voir aussi [**Ill72**], VI.5.2 et SGA 4 VI.7) ;

(3) un groupoïde $G = \Pi(E)$, dont les objets sont les éléments de E_0 (les « sommets ») et les flèches sont définies dans [**GZ67**], II.7 ;

(4) un espace topologique $X = |E|$ (un complexe cellulaire), appelé « réalisation géométrique » (ou « topologique ») (cf. *loc. cit.*, III.1).

Remarquons qu'un faisceau sur T n'est rien d'autre qu'un ensemble simplicial au-dessus de E.

(75) N.D.E. : Cette section additionnelle a été rédigée par Fabrice Orgogozo (en suivant des indications d'Ofer Gabber).

9.2. Faisceaux localement constants ; données de descente. —

Définitions 9.2.1. — On appelle *faisceau localement constant* sur :

(1) un ensemble simplicial E, tout morphisme d'ensembles simpliciaux $E' \to E$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $e \in E_i$, les opérateurs face d induisent des isomorphismes $E'_e \xrightarrow{\sim} E'_{d(e)}$ entre les fibres (cf. [**AM69**], § 10) ;

(2) un topos T, tout objet F de T tel qu'il existe un épimorphisme $U \to 1$ et un isomorphisme $F \times U \simeq f^*I \times U$, où I est un ensemble et $f : T \to \mathbf{Ens}$ est le morphisme final (cf. SGA 4, IX.2) ;

(3) un groupoïde G, tout préfaisceau sur G, c'est-à-dire tout foncteur contravariant de G dans la catégorie des ensembles (cf. [**GZ67**], append. I.1.2) ;

(4) un espace topologique X, tout faisceau d'ensembles sur X, localement constant au sens usuel.

Enfin :

(5) on appelle *donnée de descente* sur un ensemble simplicial E la donnée d'un faisceau F sur $E_0^{\sim}$ (c'est-à-dire une fonction ensembliste sur E_0) et d'un isomorphisme $\alpha : p_1^*F \xrightarrow{\sim} p_2^*F$, où $p_1, p_2 : E_1^{\sim} \to E_0^{\sim}$ sont les morphismes (déduits des) faces, satisfaisant la relation de cocycle usuelle (cf. Exp. IV, 2.1 [(1)] et *infra*).

Les morphismes entre ces cinq types d'objets, ainsi que foncteurs images inverses associés, sont définis de façon évidente.

9.3. Quelques équivalences de catégories. — Soient E un ensemble simplicial et respectivement T, G et X le topos, le groupoïde et l'espace topologique associés.

Proposition 9.3.1. — *Les catégories des faisceaux localement constants sur* E, T, G, X *ainsi que la catégorie des données de descente sur* E *sont équivalentes.*

Esquisse de démonstration. — Notons de (1) à (5) les catégories d'objets définies dans le paragraphe précédent.

– (1)⇔(5). C'est un cas particulier de [**AM69**], 10.6 (voir aussi [**GZ67**], append. I.2.3, [**Fri82**], ?.5.6 ou [**Ill72**], VI.8.1.6). Une équivalence de catégories est donnée par le foncteur associant à l'objet $(E' \to E)$ la paire (E'_0, α) où E'_0 est considéré comme un faisceau sur E_0 et où α est l'unique isomorphisme $p_1^*E'_0 \xrightarrow{\sim} p_2^*E'_0$ dont la fibre en chaque $y \in E_1$ — d'images notées x_1 et x_2 par les deux projections — est donné par les isomorphismes $(E'_0)_{x_1} \xleftarrow{\sim} (E'_1)_y \xrightarrow{\sim} (E'_0)_{x_2}$.

– (5)⇔(3). Évident : l'une des deux relations définissant les morphismes dans le groupoïde G associé à E est une relation de cocycle.

– (1)⇔(4). Cf. [**GZ67**], append. I.3.2.1.

– (1)⇔(2). Il faut montrer qu'un objet au-dessus de E est un faisceau localement constant au sens simplicial si et seulement si il l'est en tant que faisceau sur $T = E^{\sim}$. Cela résulte du fait que les faisceaux localement constants $F_\bullet$ sur T ne sont autre que les faisceaux *cartésiens*, c'est-à-dire pour lesquels les flèches $([n] \to [m])^*F_m \to F_n$ sont des isomorphismes. Ce dernier point est un cas particulier d'un fait général sur

(1)PP : j'ai remplacé « FGA, Technique de descente I, 1.6 » par « Exp. IV, 2.1 ».

les topos simpliciaux joint au fait que tout faisceau sur $E_0^\sim$ est localement constant. (Voir aussi [**Ill72**], VI.8.1.6.)

C.Q.F.D.

Pour tout groupe H, les équivalences de catégories ci-dessus induisent des équivalences entre les catégories de H-*torseurs*, ces derniers étant des faisceaux localement constants munis d'une action de H, à fibres isomorphes à H agissant sur lui-même par translation.

9.4. Groupes et groupoïdes fondamentaux. — Il résulte des équivalences de catégories précédentes que pour tout groupe H et tout ensemble simplicial E, les ensembles de classes d'isomorphismes de H-torseurs $H^1(E, H)$, $H^1(E^\sim, H)$, $\pi_0(\mathrm{Hom}(\Pi(E), BH))$ et $H^1(|E|, H)$ sont naturellement en bijection. Rappelons que l'on note BH le groupoïde ponctuel associé à H et π_0 le foncteur associant à une catégorie l'ensemble des classes d'isomorphismes de ses objets.

De même, si e est un *point* de E, les équivalences précédentes induisent des bijections entre les ensembles de classes d'isomorphismes de H-torseurs *trivialisés sur* e, notés respectivement $H^1(E \text{ rel } e, H)$, $H^1(E^\sim \text{ rel } e^\sim, H)$, $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Pi(E), e), H)$ et $H^1(|E| \text{ rel } |e|, H)$. Rappelons que l'on note $\pi_1(\Pi(E), e)$ le *groupe* $\mathrm{Isom}_{\Pi(E)}(e, e)$.
Pour H variable, ces foncteurs sont représentés, dans le cas connexe, par un groupe que l'on note $\pi_1(E, e)$. Le groupe $\pi_1(E, e)$ est isomorphe à $\pi_1(\Pi(E), e)$ et $\pi_1(|E|, |e|)$, ainsi donc qu'au groupe fondamental d'un ensemble simplicial tel que défini par Kan (cf. p. ex. [**May67**], 16.1 ou [**Ill72**], I.2.1.1). (Rappelons que l'ensemble $H^1(E, H)$ est quant à lui isomorphe à l'ensemble $H^1(\pi_1(E, e), H)$ des morphismes vers H *modulo conjugaison*, aussi noté $\mathrm{Hom\,ext}(\pi_1(E, e), H)$.)

9.5. Cônes. —

Définitions 9.5.1. — (1) Soit $f : E' \to E$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Rappelons (cf. par exemple [**Del74**], 6.3.1) que l'on note $C(f)$ l'ensemble simplicial pointé dont l'ensemble sous-jacent en degré $n \geqslant 0$ est

$$E_n \amalg \Big(\coprod_{i<n} E'_i\Big) \amalg \star,$$

où $\star$ est un singleton. Nous laissons le soin au lecteur de définir les applications simpliciales, la définition des faces en rang inférieur ou égal à deux étant rappelée ci-après. (Voir aussi [**GZ67**], VI.2 pour une variante pointée.) La catégorie des faisceaux localement constants sur $C(f)$ est équivalente à la catégorie des faisceaux localement constants sur E muni d'une trivialisation de l'image inverse sur E′. L'ensemble simplicial $C(f)$ est naturellement pointé par $\star \to C(f)$.

(2) Soit $f : T' \to T$ un morphisme de topos. Notons $C(f)$ le topos dont les objets sont les quintuplets $\big(F, F', A, \alpha : f^*F \to F', \beta : A \to \Gamma(T', F')\big)$, où F (resp. F′) est un objet de T (resp. T′), A est un ensemble, et α (resp. β) est un morphisme dans T′ (resp. **Ens**). (Voir aussi [**Del80**], 4.3.4 et [**Ill72**], III.4 pour une variante de cette construction.) La catégorie des faisceaux localement constants sur $C(f)$ est équivalente à la catégorie des faisceaux localement constants sur T munis d'une trivialisation de

l'image inverse sur T'. Le topos $\mathrm{C}(f)$ est naturellement pointé par le foncteur fibre envoyant le quintuplet $\big(\mathrm{F}, \mathrm{F}', \mathrm{A}, \alpha : f^*\mathrm{F} \to \mathrm{F}', \beta : \mathrm{A} \to \Gamma(\mathrm{T}', \mathrm{F}')\big)$ sur l'ensemble A.

(3) Soit $f : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ un morphisme de groupoïdes. Notons $\mathrm{C}(f)$ la colimite du diagramme

$$\mathrm{G} \leftarrow \mathrm{G}' \to \mathrm{B1}$$

où B1 est la catégorie ponctuelle (un objet, une flèche). La catégorie des faisceaux localement constants sur $\mathrm{C}(f)$ est équivalente à la catégorie des faisceaux localement constants sur G munis d'une trivialisation de l'image inverse sur G'.

(4) Soit $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ un morphisme d'espaces topologiques. Notons $\mathrm{C}(f)$ la colimite du diagramme

$$\star \leftarrow \mathrm{X}' \times \{0\} \to \mathrm{X}' \times [0,1] \leftarrow \mathrm{X}' \times \{1\} \to \mathrm{X}.$$

La catégorie des faisceaux localement constants sur $\mathrm{C}(f)$ est équivalente à la catégorie des faisceaux localement constants sur X muni d'une trivialisation de l'image inverse sur X'. L'espace topologique $\mathrm{C}(f)$ est naturellement pointé par $\star \to \mathrm{C}(f)$.

9.5.2. Données de descente sur le cône d'une application simpliciale.

Soient $f : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$ un morphisme d'ensembles simpliciaux et $\mathrm{C}(f)$ son cône (cf. *supra*, (1)). Utilisons la lettre p (resp. q, r) pour désigner les applications faces de E' (resp. E, $\mathrm{C}(f)$). Avant d'énoncer la proposition ci-dessous, explicitons les faces r en degré inférieur ou égal à deux en fonction de p et q. Par convention, p_{ij} (resp. p_i) est l'application face $\mathrm{E}'_2 = \mathrm{E}'_{\{1,2,3\}} \to \mathrm{E}'_1 = \mathrm{E}'_{\{1,2\}}$ (resp. $\mathrm{E}'_1 = \mathrm{E}'_{\{1,2\}} \to \mathrm{E}'_0 = \mathrm{E}'_{\{1\}}$) correspondant à l'application croissante $\{1,2\} \to \{1,2,3\}$ (resp. $\{1\} \to \{1,2\}$) d'image $\{i,j\}$ (resp. $\{i\}$)(2). On adopte la même convention pour les faces de E et $\mathrm{C}(f)$.
Le morphisme

$$r_1 : \mathrm{C}(f)_1 = \mathrm{E}_1 \amalg \mathrm{E}'_0 \amalg \star \to \mathrm{C}(f)_0 = \mathrm{E}_0 \amalg \star$$

(resp. r_2) est :

- $q_1 : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_0$ (resp. $q_2 : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_0$) sur E_1 ;
- $\mathrm{E}'_0 \to \star$ (resp. $f_0 : \mathrm{E}'_0 \to \mathrm{E}_0$) sur E'_0 ;
- $\star \to \star$ sur $\star$.

De même le morphisme

$$r_{21} : \mathrm{C}(f)_2 = \mathrm{E}_2 \amalg \mathrm{E}'_1 \amalg \mathrm{E}'_0 \amalg \star \to \mathrm{C}(f)_1 = \mathrm{E}_1 \amalg \mathrm{E}'_0 \amalg \star$$

(resp. r_{32}, r_{31}) est :

- $q_{21} : \mathrm{E}_2 \to \mathrm{E}_1$ (resp. q_{32}, q_{31}) sur E_2 ;
- $p_1 : \mathrm{E}'_1 \to \mathrm{E}'_0$ (resp. $f_1 : \mathrm{E}'_1 \to \mathrm{E}_1$, $p_2 : \mathrm{E}'_1 \to \mathrm{E}'_0$) sur E'_1 ;
- $\mathrm{E}'_0 \to \star$ (resp. $\mathrm{Id} : \mathrm{E}'_0 \to \mathrm{E}'_0$, $\mathrm{Id} : \mathrm{E}'_0 \to \mathrm{E}'_0$) sur E'_0.

Soit H une donnée de descente sur $\mathrm{C}(f)$, c'est-à-dire un faisceau H_0 sur $\mathrm{C}(f)_0 = \mathrm{E}_0 \amalg \star$ muni d'un isomorphisme $\gamma : r_1^*\mathrm{H}_0 \xrightarrow{\sim} r_2^*\mathrm{H}_0$ entre ses images inverses sur $\mathrm{C}(f)_1 = \mathrm{E}_1 \amalg \mathrm{E}'_0 \amalg \star$ satisfaisant la relation de cocycle $r_{31}^*\gamma = r_{32}^*\gamma \circ r_{21}^*\gamma$.

(2)Cette convention s'écarte de la norme simpliciale actuelle mais est plus proche des notations utilisées par Grothendieck dans sa théorie de la descente.

La restriction de l'isomorphisme γ à E_1 (resp. E'_0) est une donnée de descente $\beta : q_1^*\mathrm{G}_0 \xrightarrow{\sim} q_2^*\mathrm{G}_0$ où G_0 est la restriction de H_0 à E_0 (resp. une trivialisation t : $\underline{\mathrm{H}_0(\star)} \xrightarrow{\sim} f^*\mathrm{G}_0 =: \mathrm{F}_0$ où $\underline{\mathrm{H}_0(\star)}$ est le faisceau constant de tige $\mathrm{H}_0(\star)$). La restriction de la relation de cocycle satisfaite par γ à E_2 (resp. E'_1) est la relation de cocycle pour β (resp. $p_2^*(t) = f_1^*(\beta) \circ p_1^*(t)$). Cette dernière relation signifie que la trivialisation t est compatible à la donnée de descente $f_1^*(\beta)$ induite par β sur F_0. Il en résulte :

Proposition 9.5.3. — *Soient* $f : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$ *un morphisme d'ensembles simpliciaux et* $\mathrm{C}(f)$ *son cône, pointé par* $\star$*. La catégorie des données de descente sur* $\mathrm{C}(f)$ *trivialisées sur* $\star$ *est équivalente à la catégorie des données de descentes sur* E *munies d'une trivialisation de la donnée de descente induite sur* E'.

9.6. Représentabilité du foncteur $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; -)$**.** — Les notations sont celles de la page 90 et l'*on suppose dorénavant les composantes connexes de* $\mathrm{S}_0 = \mathrm{S}'$ *et* $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *ouvertes.* Sous cette hypothèse, on a la description combinatoire explicite suivante, qui résulte immédiatement des rappels ci-dessus.

Proposition 9.6.1. — *Pour tout groupe* G*, l'ensemble* $\pi^1(\mathrm{S}'/\mathrm{S}, \xi; \mathrm{G})$ *des classes d'isomorphismes de données de descentes munies d'une trivialisation au-dessus de* ξ *est en bijection naturelle avec l'ensemble de cohomologie non abélienne relative* $\mathrm{H}^1(\mathrm{K} \operatorname{rel} k, \mathrm{G}) := \mathrm{H}^1(\widetilde{\mathrm{K}} \operatorname{rel} \star, \mathrm{G})$.

Il en résulte que ce foncteur est représentable par un groupe, noté $\pi_1(\mathrm{K}, k)$ (le « groupe fondamental relatif »), dès lors que l'ensemble simplicial $\widetilde{\mathrm{K}} = \mathrm{C}(k \to \mathrm{K})$ est *connexe*. On vérifie immédiatement qu'il en est ainsi si et seulement si l'application $\pi_0(k) \to \pi_0(\mathrm{K})$ est *surjective*. Il suffit en particulier que l'ensemble simplicial K soit connexe. Comme indiqué dans le texte, c'est le cas si le schéma S est connexe et le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est universellement submersif.

9.7. Contractabilité de k**, contre-exemple à l'injectivité de** $k_\bullet \to \mathrm{K}_\bullet$**.** — Les deux propositions suivantes précisent la N.D.E. (53).

Proposition 9.7.1. — *Soient* κ *un corps algébriquement clos, et* X *un* κ*-schéma* connexe. *Pour tout entier* $i \geqslant 0$*, notons* X_i *la puissance fibrée* $(i+1)$*-ème de* X *sur* κ*. Pour tout entier* $i \geqslant 0$*, l'application canonique*

$$\pi_0(\mathrm{X}_i) \to \pi_0(\mathrm{X})^{i+1}$$

est une bijection. *En particulier, l'ensemble simplicial* $\pi_0(\mathrm{X}_\bullet)$ *est* contractile.

Il suffit de démontrer le lemme suivant, qui résulte par passage à la limite de la formule de Künneth. [Détailler ?]

Lemme 9.7.2. — *Soient* κ *un corps algébriquement clos et* X, Y *deux* κ*-schémas* connexes. *Alors, le produit fibré* $\mathrm{X} \times_\kappa \mathrm{Y}$ *est connexe.*

Proposition 9.7.3. — *Soient* X *un schéma* connexe, $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *un morphisme fini étale et* $\overline{x}$ *un point géométrique de* X *localisé en un point* x*. Le morphisme canonique* $\pi_0(\mathrm{X}'_{\overline{x}}) \to \pi_0(\mathrm{X}')$ *est* surjectif.

En effet, toute composante connexe de X' est d'image un ouvert-fermé de X donc rencontre la fibre X'_x. Le morphisme $\pi_0(X'_x) \to \pi_0(X')$ est donc surjectif, de même que le morphisme $\pi_0(X'_{\overline{x}}) \to \pi_0(X'_x)$.

Bibliographie

(76)

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV, Hermann, 1961, Masson, 1985, Springer-Verlag, 2006.

[BEns] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chap. I-IV, Hermann, 1970.

[Pes66] C. Peskine, *Une généralisation du « Main Theorem » de Zariski*, Bull. Sci. Math. **90** (1966), 119-127.

[PY06] G. Prasad, J.-K. Yu, *On quasi-reductive group schemes*, J. Alg. Geom. **15** (2006), 507-549.

[Ray70] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, Lect. Notes Maths. **169**, Springer-Verlag, 1970.

[AM69] M. Artin & B. Mazur, *Etale homotopy*, Lect. Notes Maths **100**, Springer, 1969.

[Del74] P. Deligne, *Théorie de Hodge* III, Publ. Math. IHÉS **44** (1974), 5-77.

[Del80] P. Deligne, *La conjecture de Weil* II, Publ. Math. IHÉS **52** (1980), 137-252.

[Fri82] E. M. Friedlander, *Etale homotopy of simplicial schemes*, Princeton Univ. Press, 1982.

[GZ67] P. Gabriel & M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer, 1967.

[Ill72] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations* I & II, Lect. Notes Maths **239** & **283**, Springer, 1971 & 1972.

[Kan58] D. Kan, *A combinatorial definition of homotopy groups*, Ann. of Math. **67** (1958), 282-312.

[May67] J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Univ. of Chicago Press, 1967.

(76) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé ; les références [AM69] et suivantes concernent l'Addenda.